スピン幾何入門４
ディラック作用素とスピノール

本間 泰史 *

概 要

このノートでは，スピン接続とディラック作用素を定義し，その基本的な性質を調べる．また，ディラック作用素と対になって現れるツイスター作用素の性質を調べる．さらに，それら作用素に関連して，ツイスタースピノール，キリングスピノール，平行スピノールの性質を調べる（ツイスタースピノールやキリングスピノールは，かなり詳しく書いてありますが，マニア向けなので，適当に読んでください）．

目 次

*理科大理工, version.2006.1.18（多分最終版）

0　序論

このノートでは，まず接続と共変微分，特にレビチビタ接続の復習からはじめる．接続や曲率を知ってるという人は，適当に読み飛ばしてほしい．次に，主 $Spin(n)$ 束上のスピン接続を定義し，スピノール束上の共変微分を定義する．スピノール束上で共変微分とクリフォード積を使って「ディラック作用素」というスピン幾何で基本的な一階微分作用素を定義し，その基本的性質を調べる．その際，ディラック作用素と対になって現れるツイスター作用素も定義する．このノートで述べるディラック作用素とツイスター作用素に関する基本的な結果は

- 共形共変性
- Lichnerowicz 公式（ボホナーワイゼンベック公式）．この公式から T. Friedrich によるディラック作用素の固有値評価を述べる．
- 指数定理．証明はしないが，使い方と計算方法を述べる．
- ツイスタースピノールの有限次元性

Friedrich 固有値評価は簡単なのであるが，重要なことは，そこからキリングスピノールという概念を得ることである（もともとキリングスピノールは Penrose が考えたものだそうですが）．これらのことを調べていくと，自然といくつか重要なスピノールが現れる．それは

- 平行スピノール.
- 調和スピノール.
- ツイスタースピノール.
- キリングスピノール（平行スピノールも含む）.

である．これらの基本的な性質を述べる．特に，ツイスタースピノールとキリングスピノールについて詳しく論じる（ただし，かなりマニアックなので注意．スピン幾何の一つの方向性を述べているとは思うけど）．

さて，ディラック作用素とツイスター作用素はスピノールに作用する作用素である．これに対して，微分形式に作用する作用素は外微分，余微分，共形キリング作用素である．対応としては「ディラック作用素 D」$\Leftrightarrow$「$d + d^*$」,「ツイスター作用素 T」$\Leftrightarrow$「共形キリング作用素 C」となっている．そこで，d, d^*, C に対する基本的な性質を学ぶ．つまり，上のスピノールの場合に対応して，

- 共形共変性
- ボホナーワイゼンベック公式と固有値評価.
- 指数定理．オイラー数と符号数を与えるもの.
- 共形キリング微分形式の有限次元性

を調べる．

また，最後にスピン c 接続とスピン c ディラック作用素の基礎事項を学ぶ.

「スピン幾何入門１から４」でスピン幾何の基礎的なことは十分であると思う．それ以降の発展は,「スピン幾何実践編」で扱う．話題としては,

1. G_2, $Spin(7)$ 幾何とスピノール（これは入門編で書くべき内容ですが，G_2 は特殊なので，入門編では書かなかった）.
2. 幾何構造（ケーラー，超ケーラー，四元数ケーラー，G_2, $Spin(7)$）とスピノールやディラック作用素の関係.
3. 対称空間上でのディラック作用素．さらに表現論との関係.
4. 正スカラー曲率の問題.

5. スピン同境類.

6. 調和スピノールの問題.

7. ディラック作用素のスペクトル幾何

8. 部分多様体のスピン幾何

9. 指数定理の一般化

10. ツイスター理論

11. サイバーグウィッテン理論.

12. その他いろいろ.

などがある．実践編は当分書く予定はないです（なぜなら，理解してないものが多いから）．しかし，入門編で学んだことを知ってれば，スピン幾何の論文のかなりの部分が読めると思うので，良しとしましょう.

1　接続と曲率

接続と曲率の復習をする．ディラック作用素を定義するだけなのでレビチビタ接続や共変微分を知っていればよいが，平行スピノールなどを扱うため，平行移動などについても述べる．もちろん，完全に証明をつけるわけではないので，詳しいことは小林-野水などを参照.

1.1　主束上の接続

G をリー群，M を多様体とする.

Definition 1.1. P が M 上の**主** G **束**とは

1. G が P に右から自由に作用している．$P \times G \ni (p, g) \mapsto pg \in P$.

2. 作用に関する軌道空間 P/G（自由に作用しているので多様体）が M であり，$\pi : P \to M$ を射影とする．このとき（G の作用も含めて）局所自明性が成立する.

G の主束 P への作用の無限小作用を考えると

$$\mathfrak{g} \ni X \to X^* \in \mathfrak{X}(P)$$

という**基本ベクトル場**を得る．つまり $p \in P$ に対して $X_p^* := \frac{d}{dt}(p \exp tX)|_{t=0}$ とする．(注意すべきは $\exp tX$ を便宜上とることが多いが $X \in T_e(G) = \mathfrak{g}$ を与える G 内の曲線ならなんでもよい)．$\mathfrak{g}$ の基底を $X_1, \cdots, X_k$ として，対応するベクトル場を $X_1^*, \cdots, X_k^*$ とすれば，作用が自由なので各点 p において一次独立であり，これらから生成される P 上のベクトル束を**垂直束といい** $V \subset TP$ **と書く**．$V = \ker d\pi$ であることに注意．一方で TM を引き戻した P 上の束 π^*TM を得る．このとき次のベクトル束の完全系列を得る

$$0 \to V \to TP \to \pi^*TM \to 0$$

これをスプリットさせることは必ずできるが，スプリットのさせ方はたくさんある．それを定めるのが接続である．

Definition 1.2. P 上の**接続**とは,

$$TP = V \oplus H$$

と splitting **を与えるもの**である．ここで $H \simeq \pi^*TM$ は G 不変 ($(dR_g)H_p = H_{pg}$) な TP の部分束である．これを**水平束**とよぶ.

この接続の定義を微分形式を使って書き換えよう.

Definition 1.3. P **上の接続形式とは，**P **上の** $\mathfrak{g}$ **値** 1-form

$$A = \sum_{i=1}^{k} A_i \otimes X_i \in \Omega^1(P) \otimes \mathfrak{g}$$

で次をみたすもの

1. A **は** G **不変である**．P 上の G 作用から $\Omega^1(P)$ への作用が定義でき，$\mathfrak{g}$ には随伴作用で作用させる．式で書けば,

   $$g \cdot A = \sum (R_g)^* A_i \otimes \mathrm{Ad}_g(X_i) = \sum A_i \otimes X_i$$

   ここで R_g は右作用なので R_g^* は左作用である.

2. A **は垂直的**である．つまり $\iota_{X^*} A = A(X^*) = X$ ($\forall X \in \mathfrak{g}$)．

Proof. 先ほどの定義と同値であることを見てみる．上のような 1-from に対して,

$$H = \ker A = \{v \in TP | \iota_v A = 0\}$$

とすれば，水平束が定まる．逆に，H が定まれば上の条件をみたす 1-form で水平ベクトルに対してゼロとなるものがただ一つ定まる ■

1.2 主束上の曲率

P に接続が与えられれば，次の分解を得る．

$$T^*P = V^* \oplus H^*, \quad \wedge^2 T^*P = (\wedge^2 V^*) \oplus (V^* \wedge H^*) \oplus (\wedge^2 H^*), \quad \cdots$$

よって

$$\Omega^1(P) = \Omega^1_v(P) \oplus \Omega^1_h(P), \quad \Omega^2(P) = \Omega^2_v(P) \oplus \Omega^2_{mix}(P) \oplus \Omega^2_h(P), \cdots$$

となる．そこで接続 $A \in \Omega^1_v \otimes \mathfrak{g}$ の微分を考えると

$$dA \in \Omega^2(P) \otimes \mathfrak{g} = (\Omega^2_v(P) \oplus \Omega^2_{mix}(P) \oplus \Omega^2_h(P)) \otimes \mathfrak{g}$$

となる．つまり $dA = dA_v + dA_{mix} + dA_h$ と三つに分解できる．

Lemma 1.1. $dA_v(X^*, Y^*) = -[X, Y]$, $dA_{mix} = 0$ となる

Proof. $(dA)(V, W) = VA(W) - WA(V) - A([V, W])$ であった．また $[X^*, Y^*] = [X, Y]^*$ となることとあわせれば $dA_v(X^*, Y^*) = -[X, Y]$ がわかる．$dA_{mix}(X^*, W) = X^*A(W) - WA(X^*) - A([X^*, W]) = -A([X^*, W])$（$X \in \mathfrak{g}, W \in H$）となるが，$H$ は G 不変であるので $L_{X^*}W \in H$ である．実際，X^* が引き起こす 1 パラメータ変換は $\phi^t(p) = p \exp tX$ であるので，$\phi^t_* = dR_{\exp tX}$ となる．また，H が G 不変とは $(dR_g)H_p = H_{pg}$ のことであった．このことから $L_{X^*}W \in H$ がわかる．よって $A([X^*, W]) = 0$ となる． ■

さて，P 上 $\mathfrak{g}$ 値微分形式 $\omega = \sum \omega_i \otimes X_i \in \Omega^k(P) \otimes \mathfrak{g}$, $\tau = \sum \tau_i \otimes X_i \in \Omega^l(P) \otimes \mathfrak{g}$ に対して $[\omega \wedge \tau]$ を

$$[\omega \wedge \tau] := \sum_{i,j} \omega_i \wedge \tau_j \otimes [X_i, X_j]$$

と定義する．例えば $[A \wedge A]$ なら

$$[A \wedge A] = \sum_{i,j} A_i \wedge A_j \otimes [X_i, X_j]$$

となるので，

$$\begin{aligned}[A \wedge A](X, Y) &= \sum A_i(X)A_j(Y)[X_i, X_j] - \sum A_i(Y)A_j(X)[X_i, X_j] \\ &= [A(X), A(Y)] - [A(Y), A(X)] = 2[A(X), A(Y)]\end{aligned}$$

を得る．

Remark 1.1. 教科書によっては微分形式の定義がことなり，$(A \wedge B)(X, Y) = \frac{1}{2}(A(X)B(Y) - A(Y)B(X))$ とすることもあるので注意.

Definition 1.4. **接続の曲率**とは dA の水平方向成分である．つまり

$$F_A = (dA)_h \in \Omega_h^2(P) \otimes \mathfrak{g}$$

である．また上で述べた補題などを使えば,

$$F_A = dA + \frac{1}{2}[A \wedge A]$$

ともかける（演習問題）.

定義から次は明らかであろう.

Proposition 1.2. F_A は G 不変であり，$\iota_{X^*} F_A = 0$ をみたす．特に，M 上のベクトル束 $\Lambda^2(M) \otimes \mathfrak{g}_P$ の切断である．ここで $\mathfrak{g}_P$ は同伴束 $P \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{g}$.

Remark 1.2. G 不変で $\iota_{X^*}\omega = 0$（つまり V 方向の成分がない）を満たす P 上の微分形式を basic とよぶ．baisc 微分形式は M 上の微分形式に対応する.

平坦接続とは $F_A = 0$ **となる接続**である．曲率の定義から水平分布が可積分である．M の単連結近傍をとれば，その上に，積分多様体がつくれ，$P = U \times G$ と局所自明化でき，接続が局所的に自明接続にできる.

Proof. 曲率の定義を考えると $V, W \in H$ とする．このとき

$$\begin{aligned} 0 = F_A(V,W) &= dA(V,W) + \frac{1}{2}[A(V), A(W)] = A([V,W]) \\ &= A([V,W]_h + [V,W]_v) = A([V,W]_v) \end{aligned}$$

となり $[V,W]$ の垂直方向がないことを意味する．つまり $[V,W] \in H$ であり，水平方向が可積分となる. ■

1.3　接続，曲率の局所表示

接続の局所表示を与えよう．まず主束を局所自明化する．つまり $M = \cup_i U_i$ として U_i 上の切断 $s^i(x) : U_i \to P$ をとることにより局所自明化 $\pi^{-1}(U_i) \simeq U_i \times G$ を行う．このとき $U_i \cap U_j$ 上では切断 $s^i(x), s^j(x)$ の差を $g_{ij}(x) : U_i \cap U_j \to G$ で表す（$s^j = s^i g_{ij}$）．これが推移関数と呼ばれるものであり，cocycle 条件 $g_{ij}g_{jk}g_{ki} = 1$ を満たす.

Remark 1.3. 逆に，推移関数が与えられていれば，$U_i \times G$ を推移関数で張り合わせれば，主束 P が得られる.

接続 A を切断 s^i で引き戻せば U_i 上の $\mathfrak{g}$ 値 1-form $A_i(x) = (s^i)^*(A)$ が定まる．このとき A_i と A_j は次のように関係する：

$$A_j = g_{ij}^{-1} A_i g_{ij} + g_{ij}^{-1} dg_{ij} \tag{1.1}$$

Proof. $X \in T_xM$ に対して，$\gamma(0) = x$, $\gamma'(0) = X$ となる曲線を $\gamma(t)$ とする．$A_j(X) = (s^j)^*A(X) = A(\frac{d}{dt}s^j(\gamma(t))|_{t=0})$ となるので，$\frac{d}{dt}s^j(\gamma(t))|_{t=0}$ の意味を考える．

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}s^j(\gamma(t))|_{t=0} &= \frac{d}{dt}s^i(\gamma(t))|_{t=0}g_{ij}(x) + s^j(x)g_{ij}(x)^{-1}\frac{d}{dt}g_{ij}(\gamma(t))|_{t=0} \\ &= dR_{g_{ij}(x)}\frac{d}{dt}s^i(\gamma(t))|_{t=0} + s^j(x)g_{ij}(x)^{-1}\frac{d}{dt}g_{ij}(\gamma(t))|_{t=0}\end{aligned}$$

第二項の意味を考える．$g_{ij}(x)^{-1}g_{ij}(\gamma(t))$ は $t = 0$ のときに $e \in G$ を通る曲線でありその接ベクトルは $g_{ij}(x)^{-1}\frac{d}{dt}g_{ij}(\gamma(t))|_{t=0} = g_{ij}(x)^{-1}(dg_{ij})_x(X)$ である．そこで $s^j(x)g_{ij}(x)^{-1}\frac{d}{dt}g_{ij}(\gamma(t))|_{t=0}$ は対応する基本ベクトル場の $s^j(x)$ での値である．よって A をかぶせれば

$$A_j(X) = A(R_{g_{ij}(x)}(s^i)_*(X)) + g_{ij}(x)^{-1}dg_{ij}(X) = g_{ij}^{-1}A_i(X)g_{ij} + g_{ij}^{-1}dg_{ij}(X)$$

■

Remark 1.4. 逆に (1.1) を満たす $\{A_i\}_i$ があれば P 上の接続をつくることができる：切断 s^j 上に接する P 上接ベクトルに対しては A_i できまる．さらに G 不変性と $A(X^*) = X$ を考えれば P 全体に拡張できる．そして，(1.1) から well-defined である．

次に曲率の局所表示をみていく．それは $F_i := (s^i)^*F_A$ によって定義される U_i 上の $\mathfrak{g}$ 値 2-form である．定義から

$$F_i = (s^i)^*(dA + \frac{1}{2}[A \wedge A]) = dA_i + \frac{1}{2}[A_i \wedge A_i]$$

である．また F_i, F_j は次のように関係する．

$$F_j = g_{ij}^{-1}F_ig_{ij}$$

Proof. 直接代入すればわかる． ■

このことから，以前述べたように，曲率は同伴ベクトル束 $\mathfrak{g}_P = P \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{g}$ に値をもつ 2-form であることがわかる．つまり $\Lambda^2(M) \otimes \mathfrak{g}_P$ の切断である．

1.4 平行移動とホロノミー

主束における平行移動とホロノミーについて考えよう．

$\gamma(t)$ を M 内の曲線とする．また $\pi(p) = \gamma(0)$ となる点 $p \in P$ を固定する．このとき $\gamma(t)$ の**水平リフト**とは p を始点とする P 内の曲線 $\tilde{\gamma}(t)$ で $\tilde{\gamma}'(t) \in H_{\tilde{\gamma}(t)}$ かつ $\pi(\tilde{\gamma}(t)) = \gamma(t)$ となるものである．このような水平リフトは唯一つに定まることが

知られている．さらに同じファイバーにある点 pg を始点とする $\gamma(t)$ の水平リフトは $\tilde{\gamma}(t)g$ となる．

そこでファイバー $\pi^{-1}(\gamma(0))$ を曲線 $\gamma(t)$ にそって平行移動させてファイバー $\pi^{-1}(\gamma(1))$ へ移すことが出来る．つまり $\Phi(\gamma) : \pi^{-1}(\gamma(0)) \to \pi^{-1}(\gamma(1))$ という微分同相写像で $\Phi(\gamma)(pg) = \Phi(\gamma)(p)g$ を満たすものを作ることができる．これを**平行移動**と呼ぶ．

x を固定して $\gamma(0) = \gamma(1) = x$ となるループを考え，その全体を $\Omega_x(M)$ とする．これは群になる．ループ γ に対して平行移動を考えると $\Phi(\gamma) : \pi^{-1}(x) \to \pi^{-1}(x)$ であるので $\Phi(\gamma)$ は $\pi^{-1}(x)$ の変換を与える．そして $\Phi(\gamma')\Phi(\gamma) = \Phi(\gamma'\gamma)$ であるので，

$$\Phi : \Omega_x(M) \ni \gamma \mapsto \Phi(\gamma) \in \{F \in Diff(\pi^{-1}(x)) | F(pa) = F(p)a\}$$

は準同形である．

点 $p \in \pi^{-1}(x)$ を固定すれば，上の F に対して $F(p) = pg_F$ となる $g_F \in G$ が定まる．また $F \circ F'(p) = pg_F g_{F'}$ となるので，

$$\Psi_p : \{F \in Diff(\pi^{-1}(x)) | F(pa) = F(p)a\} \ni F \mapsto g_F \in G$$

という準同形が定まる．そこで像

$$Hol(M, A) := \Psi_p \circ \Phi(\Omega_x(M)) \subset G$$

を**接続 A に対するホロノミー群**とよぶ．(面倒なので Ψ は書かずに $\Phi(\gamma)$ で G の元を表すことが多い)．

Remark 1.5. ホロノミー群は点 x や p のとり方で変わるが互いに同型（または共役）になるので，x や p を明記せず $Hol(M, A)$ と書く．

また定数ループにホモトピック（0 ホモトピック）なループの全体を $\Omega_x^0(M)$ と書く．この像

$$Hol^0(M, A) := \Psi_p \circ \Phi(\Omega_x^0(M)) \subset G$$

を**制限ホロノミー群**と呼ぶ．

Proposition 1.3. 制限ホロノミー群は構造群 G の連結リー部分群になる．さらに $Hol(M, A)$ の正規部分群であり，全射準同形 $\pi_1(M) \to Hol(M, A)/Hol^0(M, A)$ を得る．よって $Hol(M, A)/Hol^0(M, A)$ は可算であり，$Hol(M, A)$ **はリー群で，** $Hol^0(M, A)$ **はその単位元連結成分**になる．

outline of proof. 証明は outline のみ述べる．詳しいことは小林-野水 [12] などをみよ．0 ホモトピックなループ γ^0 と定数ループ $const$ はホモトピーで結べる．よってそれぞれに対応した平行移動 $\Phi(\gamma^0)$, $\Phi(const)$ もホモトピーで結べる．$\Phi(const) = \mathrm{id}$ であるので，$\Phi(\gamma^0)$ は単位元と path で結べることになる．よって制限ホロノミー群は path 連結である．リー群の一般論から G の path 連結な部分群はリー群であり，連結になる．

次に正規部分群になることを見る．γ をループとして γ^0 を 0 ホモトピックなループとすれば，$\gamma\gamma^0\gamma^{-1}$ は 0 ホモトピックである．よって $\Phi(\gamma)\Phi(\gamma^0)\Phi(\gamma)^{-1} \in Hol^0(M,A)$ となるので $Hol^0(M,A)$ は正規部分群である．

また $\pi_1(M) \ni [\gamma] \to [\Phi(\gamma)] \in Hol(M,A)/Hol^0(M,A)$ とすれば全射準同形である． ■

Remark 1.6. $Hol(M,A)$ は G の閉部分群になるかはわからないが，我々が扱うものはすべて閉部分群となるものである．

このホロノミー群で重要なことは次の reduction 定理である．

Proposition 1.4. M 上の主束 P および接続 A を考える．このとき構造群が $Hol(M,A)$ である P の主部分束 Q および接続 $A|_Q$ を得る．逆に，この Q, $A|_Q$ から P と A を作ることができる．

outline of proof. $p \in P$ の点を固定して，p から水平曲線で結べる点全体の集合を Q とする．この Q は主 $Hol(M,A)$ 束であることがわかる．接続を与えるには splitting を与えればよかったので $TP = H \oplus V$ なら $TQ = H \oplus (V \cap TQ)$ とすればよい．また Q と接続 A' があれば $P = Q \times_i G$ として主束 P を再現でき，また接続も水平方向がすでに定まっているので P 上の接続へ（一意的に）拡張できる． ■

ホロノミー群のリー環と曲率の関係について述べよう．ホロノミー群のリー環を $\mathfrak{h}(M,A)$ とする．リー環なので単位元連結成分である $Hol^0(M,A)$ のみから定まるものである．曲率 F_A は $\Lambda^2(M) \otimes \mathfrak{g}_P$ に値を持った，しかし接続は部分束 Q に落ちることがわかったので，実際には F_A は $\Lambda^2(M) \otimes \mathfrak{h}(M,A)_P$ に値を持つ．

Proposition 1.5. 曲率 F_A は $\Lambda^2(M) \otimes \mathfrak{h}(M,A)_P$ に値を持つ.

ある意味でこの逆も言える．

Proposition 1.6. ホロノミー群のリー環 $\mathfrak{h}(M,A)$ は次のような元で生成されるリー環である．

$$\{F_A(v,w)_q | q \in Q,\ v,w \in T_{\pi(q)}M\} \subset \mathfrak{g} \tag{1.2}$$

ここで $q \in Q$ も動かすことに注意.

outline of proof. $p_0 \in P$ を固定して水平曲線で結べる点全体が Q であった．まず $Q = P$ の場合を考える．(1.2) で生成されるリー環を $\mathfrak{g}'$ として，$\mathfrak{g}'$ に対する基本ベクトル場による垂直部分空間を V' とする．そして $H \oplus V'$ という接分布を考えると $\mathfrak{g}'$ の定義から可積分であることがわかる．そこで p_0 を通る積分多様体を考えるとその積分多様体の点は水平曲線で結べるよって P と一致する．このことから $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}'$ となる．

$Q \neq P$ の場合を考える．Q に対して上と同様にして $\mathfrak{g}' = \mathfrak{h}(M,A)$ となる． ■

Remark 1.7. (1.2) で定義されるベクトル空間を $\mathfrak{g}_0$ とすると $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] \subset \mathfrak{g}_0$ となる．このことを証明しておこう．proposition 1.5 から $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{h}(M, A)$ である．また，$\mathfrak{g}_0$ の定義と曲率が G 不変（$(R_g)^* F_A = \mathrm{Ad}(g^{-1}) F_A$）であったことから，$\mathfrak{g}_0$ は $Hol(M, A)$ 不変である．よって $[\mathfrak{h}(M, A), \mathfrak{g}_0] \subset \mathfrak{g}_0$ である．そこで $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] \subset \mathfrak{g}_0$ が成立する．上の命題の証明のおける $\mathfrak{g}_0$ で生成される $\mathfrak{g}'$ は実は $\mathfrak{g}_0$ に一致する．

Example 1.1. $F_A = 0$ の場合を考える．これは水平方向による接分布の積分多様体である．ホロノミー群のリー環は零である．そして $Hol(M, A)$ は離散群となる．reduction した主 $Hol(M, A)$ 束は M の被覆を与える．（この被覆は $\pi_1(M) \to Hol(M, A)/Hol^0(M, A) = Hol(M, A)$ から作れる）．

1.5 同伴束上の共変微分

主束上の接続 A から同伴ベクトル束上の共変微分 ∇ を定義していこう．

構造群 G の表現空間 (ρ, V) を考え，対応する同伴束 $\mathbf{V} := P \times_\rho V$ を考える．このベクトル束上に共変微分を定義したい．

Definition 1.5. **共変微分**とは次をみたす微分作用素 ∇ である

1. $\nabla : \Gamma(\mathbf{V}) \to \Gamma(\mathbf{V} \otimes T^*(M))$ は線形である．**ここで** $\Gamma(\mathbf{V})$ **は滑らかな切断全体**.

2. $e \in \Gamma(\mathbf{V})$, $f \in C^\infty(M)$ に対して，
$$\nabla f e = df \otimes e + f \nabla e$$
をみたす（ライプニッツ則）．

このときベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して $\nabla_X e := (\nabla e)(X)$ と定義する．これはベクトル場 X に沿った共変微分である．定義から $\nabla_{fX} = f \nabla_X$ であるので，$v \in T_x M$ に対して点 x での v **方向の共変微分** $\nabla_v e$ **が定まる**ことに注意する．

主束に接続が与えられているときに，同伴束に自然に共変微分が定まることを見てみよう．P に接続 A が与えられているとする．$s(x)$ を P の局所切断とし，表現空間 V の基底 $\{e\}_i$ を選んでおく．このとき $e_i(x) := [s(x), e_i]$ により $\mathbf{V}$ の局所フレーム $\{e_i(x)\}_i$ が定まる．

この $\mathbf{V}$ の局所フレーム $e_i(x)$ に対して共変微分を
$$\nabla e_i(x) = \rho_*(s^*(A)) e_i(x) = [s(x), \rho_*(s^*(A)) e_i]$$
と定め，任意の切断 $e(x) = \sum \xi^i(x) e_i$ に対してはライプニッツ則により
$$\nabla e(x) = \sum d\xi^i \otimes e_i + \xi^i \rho_*(s^*(A)) e_i = (d + \rho_*(s^*(A))) e(x)$$
と定義する（最後の等号は慣習上このように書くという意味）．このようにして定義した共変微分は well-defined である．

Proof. これが well-defined であることを確かめよう．$[s(x)g, \rho(g^{-1})e_i]$ に対して

$$\begin{aligned}\nabla e_i(x) &= [s(x)g, \rho_*((s\cdot g)^*(A))\rho(g^{-1})e_i] \\ &= [s(x)g, \rho_*(R_g(s)^*(A))\rho(g^{-1})e_i] = [s(x)g, \rho(g^{-1})\rho_*((s)^*(A))\rho(g)\rho(g^{-1})e_i] \\ &= [s(x), \rho_*(s^*(A))e_i]\end{aligned}$$

次に他のフレームをとった場合に定義が一致することを見る．他のフレームを s' とする．$s'(x) = s(x)g(x)$ とかけたとするとる．さらに $\rho(g(x))e_i = \sum g(x)_i^j e_j$ とする（表現の表現行列が $(g(x)_i^j)_{ij}$）．このとき

$$\rho(g(x))\rho_*(g(x)^{-1}dg(x))e_i = \sum dg(x)_i^j e_j$$

となる．s' に対する局所フレームを e'_i とすれば

$$e'_i(x) = [s'(x), e_i] = [s(x)g(x), e_i] = [s(x), \rho(g(x))e_i] = \sum g(x)_i^j e_j(x)$$

であり，

$$\nabla e'_i(x) = \sum dg(x)_i^j e_j(x) + \sum g(x)_i^j \nabla e_j(x)$$

が成立する．一方で，接続の局所表示のときと同じようにして，

$$\begin{aligned}\nabla e'_i &= \rho_*(s'^*(A))e'_i(x) = [s'(x), \rho_*(s'^*(A))e_i] \\ &= [s(x)g(x), (\rho(g(x)^{-1})\rho_*(s^*A)\rho(g(x)) + \rho_*(g(x)^{-1}dg(x))e_i] \\ &= [s(x), (\rho_*(s^*A)\rho(g(x)) + \rho_*(dg(x))e_i] \\ &= \sum_j g(x)_i^j \nabla e_j + \sum dg(x)_i^j e_j(x)\end{aligned}$$

となる．よって異なるフレームをとっても同じ共変微分を与える． ■

記号が面倒なので，少しの間

$$\nabla e_i(x) = \rho_*(s^*(A))e_i(x) = \sum \omega_i^j \otimes e_j$$

と表示することにする．ここで ω_i^j は局所 1-form である．

この共変微分に対する曲率について考える．

Definition 1.6. **共変微分 ∇ に対する曲率**とは

$$R_\rho(X, Y) := \nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]}$$

のこと．

$R_\rho(fX, Y)e = R_\rho(X, fY)e = R_\rho(X, Y)(fe) = fR_\rho(X, Y)e$ であり，R_ρ **は** M **上** $\mathrm{End}(\mathbf{V})$ **値二次微分形式**となる．曲率を局所フレームを使って書けば

$$R_\rho(X, Y)e_i = \rho_*((s^*F_A)(X, Y))e_i$$

となることがわかる．

Proof.

$$\nabla_X \nabla_Y e_i = \nabla_X (\sum \omega_i^j (Y) e_j) = \sum X \omega_i^j (Y) e_j + \sum \omega_i^j (Y) \omega_j^k (X) e_k$$

であるので

$$\begin{aligned}
&(\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]}) e_i \\
=&\sum (X\omega_i^j(Y) - Y\omega_i^j(X)) e_j + \sum (\omega_i^j(Y)\omega_j^k(X) - \omega_i^j(X)\omega_j^k(Y)) e_k - \sum \omega_i^j([X,Y]) e_j \\
=&\sum d\omega(X,Y) e_i + [\omega(X), \omega(Y)] e_i = \rho_*((s^*(dA + \frac{1}{2}[A \wedge A]))(X,Y)) e_i \\
=&\rho_*((s^* F_A)(X,Y)) e_i
\end{aligned}$$

■

共変外微分についても説明しておこう（しかし，これは使わないと思う）．同伴束と微分形式のベクトル束のテンソル積した M 上のベクトル束 $\Lambda^k(\mathbf{V}) := \Lambda^k(M) \otimes \mathbf{V}$ を考える．このベクトル束上に次のようにして微分作用が定まる．$\alpha \otimes e \in \Gamma(\Lambda^k(\mathbf{V}))$ に対して

$$d^\nabla (\alpha \otimes e) := d\alpha \wedge e + (-1)^k \alpha \wedge \nabla e \in \Gamma(\Lambda^{k+1}(\mathbf{V}))$$

Example 1.2. 先ほどの曲率作用素は $R_\rho = d^\nabla \nabla$ となる．

Proof. $\nabla e_i = \sum \omega_i^j \otimes e_j$ とすれば

$$\begin{aligned}
&\sum_j d^\nabla (\omega_i^j \otimes e_j)(X,Y) = \sum d\omega_i^j(X,Y) e_j - (\omega_i^j \wedge \nabla e_j)(X,Y) \\
=&\sum d\omega_i^j(X,Y) e_j - \omega_i^j(X) \nabla_Y e_j + \omega_i^j(Y) \nabla_X e_j \\
=&\sum d\omega_i^j(X,Y) e_j - \omega_i^j(X) \omega_j^k(Y) e_k + \omega_i^j(Y) \omega_j^k(X) e_k \\
=&R_\rho(X,Y) e_i
\end{aligned}$$

となる． ■

Example 1.3. 曲率 F_A は $\Lambda^2(\mathfrak{g}_P) = \Lambda^2(M) \otimes \mathfrak{g}_P$ の切断とみなすことができた．実は $d^\nabla F_A = 0$ が成立する（練習問題）．これを**ビアンキ恒等式**とよぶ．後で述べるリーマン曲率の場合には第二ビアンキ恒等式という．

1.6 同伴束の平行切断

Definition 1.7. 同伴束上に共変微分があった場合に，切断 $e \in \Gamma(\mathbf{V})$ が**平行切断**とは $\nabla e = 0$ のことである．

Example 1.4. (ρ, V) を自明表現として，その同伴束を考える．non-zero ベクトル $e \in V$ に対して大域的な切断として $e(x) = [p, e]$（$\pi(p) = x$）を得る．V の基底を $\{e_i\}_i$ とすれば，$e = \sum v^i e_i$ とかける．自明表現であるこから $\nabla e_i(x) = 0$ であるので

$$\nabla e(x) = \sum (dv^i) e_i(x) + v_i(\nabla e_i(x)) = 0 + 0 = 0$$

となるので，これは平行切断である．そして $\dim V$ だけの独立な平行切断をつくることができる．

同伴束での平行移動を考える．主束上の平行移動とは M 内の曲線 $\gamma(t)$ にそってファイバーの同一視を与えるものであった．同伴束 $\mathbf{V}$ 上の点 $[p, v]$ を考える．M 内の $\gamma(t)$ に対する P での水平リフト $\tilde{\gamma}(t)$ で $\tilde{\gamma}(0) = p$ となるものをとる．このとき $[\tilde{\gamma}(t), v]$ は $\mathbf{V}$ 内の曲線で $\gamma(t)$ のリフトである．そこで

$$\Phi(\gamma) : \mathbf{V}_{\gamma(0)} \ni [p, v] \to [\tilde{\gamma}(1), v] \in \mathbf{V}_{\gamma(1)}$$

という写像を考える．これは well-defined かつ線形である．

Proof. $[p, v] = [pg, \rho(g^{-1})v]$ であった．pg から出発する水平リフトは $\tilde{\gamma}(t)g$ である．よって $\Phi([pg, \rho(g^{-1})v]) = [\tilde{\gamma}(1)g, \rho(g^{-1})v] = [\tilde{\gamma}(1), v]$ となるので well-defined である．また線形であることも定義から明らか． ■

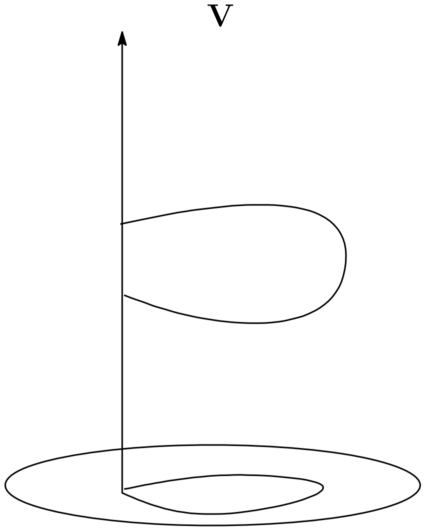
このように定まるファイバー間の線形写像を $\mathbf{V}$ の接続 $\rho_*(A)$ に対する**平行移動**と呼ぶ．またホロノミー群も同様に定義することができる．これは主束のホロノミー群の表現であり，$\rho(Hol(M, A))$ が接続 $\rho_*(A)$ に対するホロノミー群になる．また，平行移動から共変微分を定めることも可能である：ある切断 $e(x)$ に対して，

$$\nabla_{\gamma'(0)} e = \lim_{t \to 0} \frac{\Phi(\gamma)^{-1}(e(\gamma(t))) - e(\gamma(0))}{t}$$

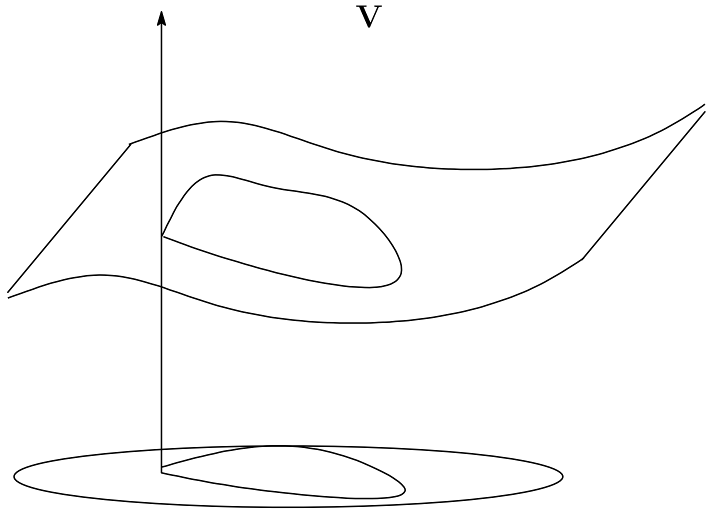
とすれば共変微分になる．逆に ∇ が与えられている場合には曲線 $\gamma(t)$ に対して $\nabla_{\gamma'(t)} s = 0$（$\forall t$）となるような $\gamma(t)$ 上の切断を唯一つ構成することができる（常微分方程式の解の存在と一意性）．これより平行移動が定まる．つまり平行移動と共変微分は同値な概念である．

さて，平行移動が定まった場合に，切断 $e(x)$ が**平行切断であるとは，$e(x)$ が平行移動によって不変**であることである．これが先ほどの定義 $\nabla e = 0$ と一致することは上記の平行移動と共変微分の同値性から明らかであろう．

Remark 1.8. 点 x_0 のファイバー $\mathbf{V}_{x_0}$ の点 $e(x_0)$ を固定して，これを平行移動で全体に拡張しようとしても，大域的切断が構成できるとは限らない．例えばあるループをとって，その水平リフトを $\tilde{\gamma}(t)$ とする．このとき $[\tilde{\gamma}(1), v] \neq [\tilde{\gamma}(0), v]$ であるので切断とはならない．平行切断とは，まず大域的な切断 $e(x)$ が存在していて，さらにそれが平行であるとしている．



単なる平行移動の図



平行切断の図

Remark 1.9. **平行切断には零点がない**ことに注意．もし $\nabla e = 0$ で，ある点で $e(x) = 0$ となるとすれば，$e(x) = 0$ からの平行移動は零切断となってしまう．

平行切断に対しての重要な命題は次である．

Proposition 1.7. 構造群 G の表現 (ρ, V) の同伴束および共変微分を考える．平行切断 $\nabla e = 0$ を考える．**このとき $e(x_0)$ は x_0 でのホロノミー群の作用により不変**である．逆に，**ホロノミー群で不変なベクトル $v \in V$ が存在すれば，平行切断 e で $e(x_0) = [p, v]$ となるものが存在**する．

Proof. $\nabla e = 0$ とする．このとき平行切断は平行移動によって不変である．特に，勝手なループに対する平行移動によって不変．つまりホロノミー群 $\rho(Hol(M, A))$ によって不変である．

逆に $\rho(Hol(M, A))$ で不変なベクトル v を考える．ここで $Hol(M, A)$ は点 p_0 を基点とするホロノミー群とする．$e(x_0) = e(\pi(p_0)) = [p_0, v]$ とする．点 x での値 $e(x)$ を，x と x_0 を結ぶ曲線 γ に対する平行移動によって定める．つまり $e(x) = \Phi(\gamma)(e(x_0))$．

別の曲線 γ' をとった場合に $\Phi(\gamma)(e(x_0)) = \Phi(\gamma')(e(x_0))$ つまり $\Phi(\gamma')^{-1}\Phi(\gamma)(e(x_0)) = e(x_0)$ を証明すべきである．このことは，$\Phi(\gamma')^{-1}\Phi(\gamma) = \Phi(\gamma'^{-1}\gamma) = \rho(\exists g) \in \rho(Hol(M, A))$ であり，v がホロノミー群で不変であることからわかる．よって大域的な切断が定義でき，作り方から平行切断である． ■

この命題から次のことがわかる．すべての同伴束のすべての平行切断を考え，それらを固定する群を H とする．このとき $Hol(M, A)$ は H の部分群である．このように，**平行切断を考えれば，ホロノミー群がわかる**（もちろん一致するとは限らないが）．

Example 1.5. ある表現空間 (ρ, V) に対する G 不変幾何構造を考える．例えば，エルミート内積，実構造などである．エルミート内積や実構造はある表現空間の G

不変元である．よって，同伴束に導かれるエルミート内積や実構造はすべて平行である．例えば，V 上の G 不変エルミート内積 h から $\mathbf{V}$ 上のファイバー計量 h を定義する．このとき $\nabla h = 0$ が成り立つ．つまり

$$\nabla(h(\phi, \psi)) = h(\nabla\phi, \psi) + h(\phi, \nabla\psi)$$

が成立する．

最後に計算上たびたび使用する命題を述べておく

Proposition 1.8. 同伴束上の共変微分を考える．**多様体上の点** x_0 **を固定する．同伴ベクトル束の局所フレーム** $\{e_i(x)\}_i$ **で** $(\nabla e_i)_{x_0} = 0$ **となるものが存在**する．また平行な計量が入っている場合に正規直交フレームで同様なものが存在する．

Proof. 固定した点 x のファイバーのフレームを $\{e_i(x_0)\}_i$ も固定する．点 x_0 から放射線状に $\{e_i(x_0)\}_i$ を平行移動させる．このとき x_0 の近傍を十分小さくとれば，$e_i(x)$ は局所切断になり，さらに近傍を小さくとれば一次独立性が保たれるので局所フレームとなる．定義から $(\nabla e_i)_{x_0} = 0$ である．二番目の主張は平行移動によって，計量が平行であることから正規直交性が保たれることによる．

注意すべきは，構成した局所フレームは点 x_0 では $(\nabla e_i)_{x_0} = 0$ であるが，その近傍で平行切断になるとは限らないことである．平行切断になるためには曲率が零であることが必要．

■

2 レビチビタ接続

この章ではレビチビタ接続およびリーマン曲率テンソルについて考える．

2.1 レビチビタ接続

多様体上には特別な主束としてフレーム束という主 $GL(n, \mathbb{R})$ 束を考えることができる．すなわち各点でのフレームをすべて集めたものをファイバーとする主束である．このとき $GL(n, \mathbb{R})$ の $\mathbb{R}^n$ への自然表現に対する同伴束は接束 $T(M)$ である．主フレーム束上の接続から導かれる $T(M)$ 上の共変微分 ∇ に対して，次の**捩率テンソル（torsion tensor）**をかんがえることができる：

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y].$$

我々が考える接続は，この torsion tensor **が零のもの**に限ることにする．

さらに多様体がリーマン多様体の場合には正規直交フレーム全体の主束である，正規直交フレーム束 $\mathbf{O}(M)$ を考えることができる．この主束上の接続は

$$\nabla g = 0, \quad (\iff X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z), \ \forall X, Y.Z)$$

をみたす．逆に，$\nabla g = 0$ を満たす接続は $\mathbf{O}(M)$ 上の接続を与える．

Definition 2.1. $\nabla g = 0$ **と** $T = 0$ **を満たす接続をリーマン多様体上のレビ-チビタ接続**という.

Proposition 2.1. レビ-チビタ接続は固定した**リーマン計量に対して唯一つ存在**することがわかる.

Proof. 天下り的に与える.

$$2g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y)$$
$$+g([X, Y], Z) + g([Z, X], Y) - g(X, [Y, Z]) \quad \forall Z$$

により $\nabla_X Y$ を定義すると, 共変微分であり計量を保存し torsion が零であることがわかる. 一意性は $\nabla g = 0$, $T = 0$ なら上の式を満たさなければならないことがわかるので. ■

以下では, このリーマン多様体上のレビチビタ接続を考察する.

レビチビタ接続からみちびかれる接束上の共変微分を ∇ とする. U 上の局所正規直交フレームを $(e_1, \cdots, e_n)$ とする. この $(e_1, \cdots, e_n)$ は主フレーム束の局所切断であるので, この切断によってレビチビタ接続を引き戻すと U 上の $\mathfrak{so}(n)$ 値 1-form A_U を得るが, それは接束上の共変微分を用いて

$$A_U = \frac{1}{2}\sum_{1\le i,j\le n} g(\nabla e_i, e_j) e_i \wedge e_j = \sum_{1\le i<j\le n} g(\nabla e_i, e_j) e_i \wedge e_j$$

となる.

Proof.

$$g(\rho_*(A_U(X))e_k, e_t) = \frac{1}{2}\sum_{1\le i,j\le n} g(g(\nabla_X e_i, e_j)(e_i \wedge e_j)(e_k), e_t)$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{ij}(\delta_{ki}\delta_{jt} g(\nabla_X e_i, e_j) - \delta_{jk}\delta_{it} g(\nabla_X e_i, e_j))$$
$$= \frac{1}{2}(g(\nabla_X e_k, e_t) - g(\nabla_X e_t, e_k)) = g(\nabla_X e_k, e_t)$$

となるので $\rho_*(A_U(X))e_k = \nabla_X e_k$ となる. 主フレーム束上の接続は自然表現に対する同伴束上の共変微分から定めることができるので, この式からレビチビタ接続の局所表示が上のようになることがわかる. ■

曲率形式の局所表示は, 同じ局所フレームを使って

$$F_U(X, Y) = \frac{1}{2}\sum_{i,j} g(R(X, Y)e_i, e_j) e_i \wedge e_j$$

となる．ここで $R(X,Y)$ は接束上の曲率であり

$$R(X,Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \tag{2.1}$$

である．また

$$R_{ijkl} := g(R(e_i, e_j)e_k, e_l) \tag{2.2}$$

とすれば,

$$F_U(e_i, e_j) = \frac{1}{2} \sum_{k,l} R_{ijkl} e_k \wedge e_l$$

ともかける．

Remark 2.1. R_{ijkl} の定義は論文によってことなる．このマイナス倍を R_{ijkl} としている論文も多い．

2.2 曲率テンソル

式 (2.1) で定義した接束での曲率を**リーマン曲率テンソル**とよぶ．リーマン曲率テンソルに関する事実をいくつか述べる．通常のテキストではある局所座標系に対するフレーム $(\partial/\partial x_1, \cdots, \partial/\partial x_n)$ について考えることが多いが，ここでは，ある正規直交基底 $\{e_i\}$ に対しての表示を考えることにする．(個人的に，g^{ij} などの記号は邪魔でしょうがない）．

リーマン曲率テンソル R に対して (2.2) で与えられる R_{ijkl} を考える．この R_{ijkl} を縮約することによりいくつかの微分幾何で重要なテンソルを得る．

1. **リッチ曲率**を

$$R_{ij} = \sum_b R_{bijb}$$

で定義する．これは $R_{ij} = R_{ji}$ を満たす対称テンソルであり，

$$Ric(X,Y) = \sum R_{ij} X^i Y^j$$

と書くこともある．またリッチ変換（対称変換）$Ric : TM \to TM$ を

$$Ric(X) := Ric(\sum X^i e_i) = \sum R_{ij} e_j X^i$$

とする．

Ric は対称テンソルであるので，各点で対角化することができる．その各固有値がすべての点で $> r$ のとき $Ric > r$ と書く．

リッチ曲率が零の多様体を**リッチ平坦多様体**とよぶ．リッチ曲率に対して後で使う基本的な定理は次の Meyer's theorem

Theorem 2.2 (マイヤース). **完備**連結 n 次元リーマン多様体 (M,g) でリッチ曲率が $Ric \geq (n-1)\delta^2 > 0$ であると仮定する．このとき M **はコンパクト**であり，直径 $d(M)$ は $d(M) \leq \pi/\delta$ を満たす．また $\tilde{M}$ を M のリーマン普遍被覆とすると，$\tilde{M}$ もリッチ曲率が正なので，$\tilde{M}$ もコンパクトである．よって，$\pi_1(M)$ **は有限群**である．そして $H^1(M,\mathbb{Z}) = \pi_1(M)/[\pi_1(M),\pi_1(M)]$ も有限群であるので，$H^1(M,\mathbb{Z})$ には，捩れ部分しかない．特に $H^1(M,\mathbb{R}) = 0$ である．

Proof. 証明は例えば，T. Aubin 「some nonlinear problems in Riemannian geomery」（springer1998）の page 16 を参照．マイヤースの定理はリーマン幾何のどの本をみても載っている.（証明は難しくない）.

また，$H^1(M,\mathbb{R}) = 0$ はボホナーワイゼンベック公式を使っても証明できる． ■

Example 2.1. 球面から一点除いた空間を考える．計量は同じなのでリッチ曲率は正である．しかし，球面から一点を除いたら完備でない．実際，$\mathbb{R}$ 上全体で定義されない測地線が存在する（除いた一点を通るような測地線）．このように，上の定理で完備であることは欠かせない.

また次の定理も重要である.

Theorem 2.3 (チーガー・グロモール). *(a)* (M,g) を**コンパクトリーマン多様体でリッチ曲率が非負**とする．このときリーマン普遍被覆 $(\tilde{M},\tilde{g})$ は $N \times \mathbb{R}^k$ と分解できる．ここで N はコンパクト単連結なリッチ曲率が非負のリーマン多様体である.

(b) ：(M,g) を**コンパクトリーマン多様体でリッチ平坦**なら，(M,g) のリーマン**有限被覆**で $N \times T^k$ となるものが存在．ここで N はコンパクト単連結なリッチ平坦なリーマン多様体である.

Proof. チーガー・グロモールの定理については，例えば，Besse の本の page 169 を参照. ■

Section 7 でリッチ曲率とボホナーワイゼンベック公式の関係や応用について触れる．そのほかにもリーマン幾何ではリッチ曲率に対してたくさんの定理が知られている．それらについてはリーマン幾何の適当な本を参照.

2. **スカラー曲率**と呼ばれる多様体上の関数を

$$\kappa = \sum R_{ii}$$

で定義する．スカラー曲率が定数となる多様体を**定スカラー曲率多様体**とよぶ．リッチ平坦ならスカラー曲率は零である.

3. リッチテンソルは同伴ベクトル束 $S^2(T(M)) \simeq S^2(T^*(M))$ の切断とみなすことができるが，これは既約ベクトル束ではない．実際，$O(n)$ に関する既約分解 $S^2(\mathbb{R}^n) = S_0^2(\mathbb{R}^n) \oplus \mathbb{R}$（トレース零部分とトレース部分）が成立する．そこで，この分解に関してリッチを分解すれば，

$$R_{ij} = (R_{ij} - \frac{\kappa}{n}\delta_{ij}) + \frac{\kappa}{n}\delta_{ij}$$

となる．我々は

$$E_{ij} := \frac{1}{n-2}(\frac{\kappa}{n}\delta_{ij} - R_{ij})$$

と定義して，これを**アインシュタインテンソル**と呼ぶ．このテンソルは $E_{ij} = E_{ji}$, $\sum E_{ii} = 0$ を満たす． そして $E_{ij} = 0$ となる多様体を**アインシュタイン多様体**と呼ぶ.（テキストによっては E_{ij} の適当な定数倍がアインシュタインテンソル）.

第二ビアンキ恒等式 $d^\nabla R = 0$ を使えば，連結リーマン多様体上で $Ric = f(x)g$（我々の記号では $R_{ij} = f(x)\delta_{ij}$）となるなら f は定数であることがわかる（ただし $n \geq 3$）．よって**アインシュタイン多様体上でスカラー曲率** $\kappa = \sum R_{ii}$ **は定数**であるので，アインシュタイン多様体は定スカラー曲率多様体である．

上でリッチテンソルの既約分解を与えたが，リーマン曲率テンソルそのものを既約分解することを考える．まず，曲率テンソルは，同伴束 $\Lambda^2(M) \otimes \mathfrak{so}(n)_P \simeq \Lambda^2(M) \otimes \Lambda^2(M)$ の切断とみなせる．そこで，この同伴束の既約分解を行えば R の既約分解ができる．まずリーマン曲率テンソルは

$$R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk} \tag{2.3}$$

$$R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} = 0 \tag{2.4}$$

を満たすことがわかる．(2.3) は明らか．(2.4) は torsion が零から従う．(2.4) を**第一ビアンキ恒等式**とよぶ．この二つの条件から

$$R_{ijkl} = R_{klij} \tag{2.5}$$

を得る.

Remark 2.2. 式 (2.3) と (2.5) から (2.4) は導けない.

式 (2.4) からリーマン曲率テンソル R は $S^2(\Lambda^2(M)) \subset \Lambda^2(M) \otimes \Lambda^2(M)$ の切断であることがわかる．つまり

$$R : \Lambda^2(M) \ni e_i \wedge e_j \mapsto 1/2 \sum_{kl} R_{ijkl} e_k \wedge e_l \in \Lambda^2(M)$$

という変換は対称変換である．そこで $S^2(\Lambda^2(M))$ を既約分解すればよいことになるが，その分解はリーマン幾何では良く知られた話なので，天下りで分解を与えてしまおう.

Proposition 2.4 (リーマン曲率分解).

$$K_{ijkl} := E_{ik}\delta_{jl} + E_{jl}\delta_{ik} - E_{il}\delta_{jk} - E_{jk}\delta_{il},$$
$$S_{ijkl} := \frac{\kappa}{n(n-1)}(\delta_{il}\delta_{jk} - \delta_{ik}\delta_{jl}), .$$
$$W_{ijkl} := R_{ijkl} - K_{ijkl} - S_{ijkl}$$

とする．W_{ijkl} **を共形ワイルテンソルと呼ぶ**．このとき，リーマン曲率テンソルは

$$R_{ijkl} = W_{ijkl} + K_{ijkl} + S_{ijkl}$$

と分解される．つまり**リーマン曲率テンソルは共形ワイルテンソル＋アインシュタインテンソル＋スカラー曲率**と分解されることになる．

これらのテンソルの意味を述べよう．

- E_{ij} は $S_0^2(T^*(M))$ の切断とみなせる．これを $S^2(\Lambda^2(M))$ の切断へ埋め込む操作が
$$E_{ij} \mapsto K_{ijkl} = E_{ik}\delta_{jl} + E_{jl}\delta_{ik} - E_{il}\delta_{jk} - E_{jk}\delta_{il}$$
である．実際，K_{ijkl} は (2.3)-(2.5) の関係式を満たす．そして
$$\sum K_{ijil} = (n-2)E_{jl}$$
と E_{ij} を復元できる．

- スカラー曲率 κ は $\Lambda^0(M)$ の切断とみなせるが，これを $S^2(\Lambda^2(M))$ へ埋め込む操作が
$$\kappa \mapsto S_{ijkl} = \frac{\kappa}{n(n-1)}(\delta_{il}\delta_{jk} - \delta_{ik}\delta_{jl})$$
であり，S_{ijkl} は (2.3)-(2.5) の関係式を満たし，
$$\sum S_{ijil} = -\frac{\kappa}{n}\delta_{jl}, \quad \sum S_{ijij} = -\kappa$$
となるので κ を復元できる．

- このように $S^2(T^*(M)) = S_0^2(T^*(M)) \oplus \Lambda^0(M)$ を $S^2(\Lambda^2(M))$ へ埋め込める．言い方を変えれば，$S_0^2(T^*(M)), \Lambda^0(M)$ は $S^2(\Lambda^2(M))$ の既約成分である．

- また W_{ijkl} は (2.3)-(2.5) の関係式および
$$\sum_i W_{ijil} = \sum R_{ijil} - \sum K_{ijil} - \sum S_{ijil} = -R_{jl} - (n-2)E_{jl} + \frac{\kappa}{n}\delta_{jl} = 0$$
をみたす．

$n \geq 5$ の場合．$\Lambda^2(M) \otimes \Lambda^2(M)$ の既約成分には highest weight が $(2_2, 0_{m-2})$ となるものが含まれる．W_{ijkl} は，その既約ベクトル束の切断である．

$n = 2, 3$ ならば，そのような既約ベクトル束は存在せず $W_{ijkl} = 0$ である．

$n = 4$ ならば W_{ijkl} はさらに既約分解され $W_{ijkl} = W^+_{ijkl} + W^-_{ijkl}$ となる．それぞれ $(2, 2)$, $(2, -2)$ という highest weight をもつ既約ベクトル束の切断である．この具体的な分解はホッジ作用素を使った分解で行えばよい．$*^2 = (-1)^{p(n-p)} = (-1)^{2 \cdot 2} = 1$ であるので $\Lambda^2(M)$ を既約分解でき $\Lambda^2_+(M) \oplus \Lambda^2_-(M)$ となる．それぞれ highest weight は $(1, 1)$, $(1, -1)$ である．そして $\Lambda^2_+(M) \otimes \Lambda^2_+(M)$ を分解したとき，$(2, 2)$ という highest weight をもつ既約成分が存在する．W^+ はこの既約ベクトル束の切断である．W^+_{ijkl} を**自己双対共形ワイルテンソル**，W^-_{ijkl} を**反自己双対共形ワイルテンソル**とよぶ．

- 上のようにリーマン曲率テンソルを既約分解したが，$S^2(\Lambda^2(M))$ を既約分解するなら，さらに余分な既約成分が存在する．$Q \in S^2(\Lambda^2(M))$ に対して

$$b(Q)(x, y, z, w) = \frac{1}{3}(Q(x, y, z, w) + Q(y, z, x, w) + Q(z, x, y, w))$$

として，これをビアンキ写像とよぶ．$\alpha \odot \beta \in S^2(\Lambda^2(M))$ に対しては $b(\alpha \odot \beta) = \frac{1}{6}\alpha \wedge \beta$ となることがわかる．またリーマン曲率テンソル R は $b(R) = 0$ となる．よって次元などを勘定すれば

$$S^2(\Lambda^2(M)) = \ker b \oplus \mathrm{im} b \simeq \ker b \oplus \Lambda^4(\mathbb{R}^n)$$

と分解できる．この $\ker b$ の部分を既約分解したものがリーマン曲率テンソルの分解に対応している．

$n \geq 5$ なら

$$S^2(\Lambda^2(M)) \simeq \mathbf{V}_{(2_2, 0_{m-2})} \oplus S^2_0(T^*M) \oplus \Lambda^0(M) \oplus \Lambda^4(M)$$

となる．

$n = 4$ なら $\mathbf{V}_{(2_2, 0_{m-2})}$ の部分が $\mathbf{V}_{(2,2)} \oplus \mathbf{V}_{(2,-2)}$ とさらに分解される．

$n = 3$ の場合には

$$S^2(\Lambda^2(M)) \simeq S^2_0(T^*M) \oplus \Lambda^0(M)$$

となる．$n = 3$ の場合にはこの分解からわかるようにリーマン曲率テンソルはリッチテンソルがわかればよい．

$n = 2$ の場合には

$$S^2(\Lambda^2(M)) \simeq \Lambda^0(M)$$

である．つまりこの場合にはスカラー曲率がわかればよい．**ガウス曲率 K とすれば，$\kappa = 2K$ となる**．．そして，$R_{ij} = \frac{\kappa}{2}\delta_{ij}$，$\kappa = 2R_{1221} = 2K$ が成立する（$R_{ij} = \frac{\kappa}{2}\delta_{ij}$ という条件があっても $n = 2$ なので，定数にならないことに注意）．a また．スカラー曲率が定数なら，定曲率空間である．

共形ワイルテンソル W とポントリャーギン類の関係について触れておく（証明は例えば，小林昭七「接続の微分幾何とゲージ理論」）

Proposition 2.5. 接束に対するポントリャーギン類を *Chern-Weil* 理論によりレビチビタ接続の曲率で表示したとする．このとき**ポントリャーギン類は W にのみ依存**する．特に，$W = 0$ **という計量が入れば，ポントリャーギン類は零**である．

Remark 2.3. リーマン多様体が**共形平坦**とは，**局所的に**共形変形すればリーマン多様体として平坦．つまり $g = \sum dx_i \otimes dx_i$ となることである．このとき $W = 0$ となることがわかる．$n > 3$ ならこの逆が成立．例えば，球面は $W = 0$ であるが，$S^n \setminus \{N\}$ を共形変形して $\mathbb{R}^n$ にすることができる．$n = 3$ のときは W がないので，別のテンソルを使って同様のことが言える．$n = 2$ なら等温座標系の存在から必ず共形平坦である．．任意次元で定曲率空間は局所的に球面，双曲面，ユークリッド空間のいずれかなので，共形平坦となる．

リーマン多様体 M で，$W_{ijkl} = 0, E_{ij} = 0$ となる場合に**定曲率空間**とよぶ（二次元の場合はスカラー曲率が定数の場合）．特に，完備定曲率空間を**空間形**とよぶ．**完備単連結定曲率**は次のいずれかである（それぞれ標準計量を入れている）．

1. 正の場合：球面 S^n
2. ゼロの場合：ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$,
3. 負の場合：双曲空間 H^n

よって，一般の空間形は，普遍被覆として上のいずれかをもつ．言い換えると局所的には，上のいずれかと等長同型である．

1. 正の場合：この場合は空間形がなんであるかわかっている．それは**偶数次元なら球面と実射影空間．奇数次元なら球面とレンズ空間（たくさんある）**である．

   レンズ空間はホモトピー同値であるが同相でない例を与える．ラプラシアンのスペクトルが一致するが等長でない例などを与える．いろんな意味でレンズ空間は重要.

2. 零の場合：例えば，$\mathbb{R}^n$ を格子で割った**平坦トーラス**または，それを有限群で割ったものなどがある．一般には $\mathbb{R}^k \times T^l$ を有限群で割ったもの.

   平坦トーラスらは互いに等長ではない．また，リーマン多様体として，平坦トーラスが $S^1 \times \cdots \times S^1$ とリーマン直積として書けないこともある.

3. 負の場合：2次元コンパクトリーマン面（genus 2以上）．ただし，定曲率 -1 となる計量は一つではない（タイヒミュラー空間論へ）．高次元では，例をつくるのも難しい

詳しくはWolfの本「Spaces of constant curvature」などを見よ．

2.3 リーマンホロノミー群

リーマン多様体上のレビチビタ接続に対するホロノミー群に対する概略を述べる（例えば [6] や，酒井隆「リーマン幾何学」を見よ）．

Definition 2.2. リーマン多様体 (M, g) に対して，レビチビタ接続に対するホロノミー群を $Hol(M) \subset O(n)$（または $Hol(M, g)$），制限ホロノミー群を $Hol^0(M) \subset SO(n)$ と書く．それぞれ，**リーマンホロノミー群，制限リーマンホロノミー群**とよぶ．また，ホロノミー環を $\mathfrak{h}(M)$ と書く．

Section 1.4で述べた，主束のホロノミー群について成立したことは，すべてリーマンホロノミー群について成立する．また，ビアンキ恒等式から，**レビチビタ接続の曲率は** $S^2(\mathfrak{h}(M))$ **に値をもつ**.

さて，ふたつのリーマン多様体 (M_1, g_1), (M_2, g_2) があって，その積 $M_1 \times M_2$ はリーマン計量 $g_1 \times g_2$ によって，リーマン多様体になる．これは $T_{(x_1,x_2)}(M_1 \times M_2) = T_{x_1}M_1 \times T_{x_2}M_2$ に $g_1 \times g_2$ というリーマン計量をいれることによる．このとき

$$
\begin{aligned}
Hol(M_1 \times M_2, g_1 \times g_2) &= Hol(M_1, g_1) \times Hol(M_2, g_2), \\
Hol^0(M_1 \times M_2, g_1 \times g_2) &= Hol^0(M_1, g_1) \times Hol^0(M_2, g_2)
\end{aligned}
$$

になることは明らかである．

Definition 2.3. リーマン多様体が**可約**とは，上のようにリーマン多様体の積になること．**局所可約**とは局所的にリーマン多様体の積になること．また，可約でないときにリーマン多様体が**既約**とよぶ.

ホロノミー群の $\mathbb{R}^n$ への表現を既約分解すると，実はホロノミー群自信が分解されることがわかる．そして，リーマン多様体としても分解されることになる，そこで，次の有名な定理が導ける.

Theorem 2.6 (de-Rham 分解定理). **完備単連結リーマン多様体** (M, g) **に対して，完備単連結リーマン多様体** (M_i, g_i) **で** $Hol(M_i, g_i)$ **が** $\mathbb{R}^{n_i}$ **へ既約に作用するもので，** $(M, g) = (M_1, g_1) \times \cdots \times (M_k, g_k)$ **かつ** $Hol(M, g) = Hol(M_1, g_1) \times \cdots \times Hol(M_k, g_k)$ **となるものが存在**する.

また，単連結を仮定しない場合には，局所的に，つまり制限ホロノミー群に対して上の定理が成立する（完備性がなくてもよい）．

そこで，リーマン多様体の局所的な構造を調べるには，単連結既約リーマン多様体について考えればよい．リーマン多様体の重要な例として，対称空間があるが，単連結既約対称空間はカルタンにより完全に分類されている．そこで，対称空間でない単連結リーマン多様体を分類することになる．実は，そのホロノミー群は分類されているのである．

Theorem 2.7 (Berger の分類)**.** *M を完備単連結 n 次元リーマン多様体でリーマン多様体として既約かつ対称空間でないとする．このとき M のホロノミー群は次のいずれかである．*

1. $Hol(M) = SO(n)$
2. $n = 2m$（$m > 2$）で $Hol(M) = U(m)$.
3. $n = 2m$（$m > 2$）で $Hol(M) = SU(m)$.
4. $n = 4k$（$k > 2$）で $Hol(M) = Sp(k)$.
5. $n = 4k$（$k > 2$）で $Hol(M) = Sp(k)Sp(1)$.
6. $n = 7$ で $Hol(M) = G_2$.
7. $n = 8$ で $Hol(M) = Spin(7)$.

（制限ホロノミー群に対してなら，完備性がなくてもよい）．

上の定理に関する大事な事実は，**Berger のリストのホロノミー群をもつリーマン多様体が実際に存在する**ことである．しかも**コンパクトな多様体が存在**する．$Hol(M) = SO(n)$ の例は球面．$Hol(M) = U(m)$ の例は複素射影空間．$Hol(M) = Sp(k)Sp(1)$ の例は四元数射影空間である．そのほかの場合には，explicit に計量が書けるわけではないが，コンパクトな例が存在することが知られている（Calabi-Yau, Joyce など）．

また，それぞれに対応する幾何構造がある．詳しくは Joyce の本 [11] を見よ．

1. $Hol(M) \subset SO(n)$ の場合：一般のリーマン多様体で，特別な幾何構造はない．
2. $Hol(M) \subset U(m)$ の場合：M は**ケーラー多様体**.（平行）ケーラー形式が存在.
3. $Hol(M) \subset SU(m)$ の場合：M は $SU(m)$ **構造をもつ**．**リッチ平坦ケーラー**多様体，標準的スピン構造が存在.（平行）正則体積要素が存在.
4. $Hol(M) \subset Sp(k)$：M は**超ケーラー**多様体．リッチ平坦．標準的なスピン構造が存在.（平行）複素シンプレクティック形式が存在.

5. $Hol(M) \subset Sp(k)Sp(1)$：$M$ は**四元数ケーラー**多様体．アインシュタイン多様体.（平行）Kraines 形式が存在.

6. $Hol(M) \subset G_2$：M は G_2 **多様体**．リッチ平坦．標準的なスピン構造が存在.（平行）3-form の存在.

7. $Hol(M) \subset Spin(7)$：M は $Spin(7)$ **多様体**．リッチ平坦．標準的なスピン構造が存在.（平行）4-form の存在

ここで標準的なスピン構造とは，幾何構造と可換なスピン構造が自然に定まることを意味する．

Remark 2.4. $Hol(M) \subset SU(m)$ なら，リッチ平坦ケーラーだが，逆は一般に成立するとは限らない.

平行切断の存在は，ホロノミー群で不変な元の存在と同値であった．そこで，上で述べた，各幾何構造に特有の平行微分形式は，$\Lambda^*(\mathbb{R}^n)$ を $Hol(M)$ に対して既約分解したときに，自明表現が存在するかどうかという問題になる.「スピン幾何入門２」を参照にして，$U(m)$, $Sp(k)$, $Sp(k)Sp(1)$ の場合の微分形式を既約分解を行うことにより，平行微分形式の存在がわかる（演習問題）．G_2, $Spin(7)$ の表現論は述べていないが，やり方は同様である．

それぞれの幾何構造に対して，幾何学が発展しているので，これ以上は詳しくは述べないことにする（スピン幾何実践編にて）.

2.4　共形変形と共形ラプラシアン

後で定義するディラック作用素やツイスター作用素はリーマン計量の共形変形によって共変に変化する．そこで，この subsection では共形変形に対して主束，同伴束，曲率などの変化を見ていき，共形共変二階微分作用素である共形ラプラシアンを定義する．

リーマン多様体より，より広い概念である共形多様体について考える．リーマン多様体とはリーマン計量を持った多様体であった．**共形多様体とは共形構造（角度のみの構造）をもった多様体**である．ここで共形構造とは，あるリーマン計量 g の共形類 $[g]$ のことである．また接ベクトル X, Y の角度を $\cos\theta = g(X,Y)/(|X||Y|)$ とすれば，これは共形類のみで定まる．

共形群 $CO(n)$ を

$$CO(n) = \{ag | g \in O(n), a \in \mathbb{R} \setminus 0\} \subset GL(n, \mathbb{R})$$

とすれば，多様体の一つの共形構造とは主フレーム束から主 $CO(n)$ 束 $\mathbf{CO}(M)$ への縮約を与えることである．共形構造 $\mathbf{CO}(M)$ に対して主 $O(n)$ 束 $\mathbf{O}(M)$ への recduction を与えれば，リーマン計量が定まる．この縮約の仕方はたくさんある

が，縮約で定まるリーマン計量はどれも**共形変形**$g' = e^{2\sigma(x)}g$（$\sigma \in C^\infty(M)$）で結びつく．そこで共形構造とは，あるリーマン計量の共形類といっても言ってもよい．

等長変換とは M の微分同相で $\phi^*(g) = g$ となるものであった．**共形変換**とは M の微分同相 ϕ であり，$\phi^*(g) \in [g]$ となるものである．また，等長変換の 1 パラメータ変換群を導くのがキリングベクトル場であったが，共形変換の 1 パラメータ変換群を導くのが**共形ベクトル場（or 共形キリングベクトル場）**という．

$CO(n)$ の表現は，$O(n)$ の表現空間 (ρ, V) 及び $m \in \mathbb{Z}$ として，

$$CO(n) \ni ag \mapsto a^m \rho(g) \in GL(V) \tag{2.6}$$

とすることにより得られる．この m を**共形重み（confromal weight）**とよぶ．また (2.6) の表現を $((\rho, m), V)$ と書くことにする．

Remark 2.5. $O(n)$ の表現は $SO(n)$ の表現とほぼ同じ．$SO(n)$ の表現 $\Lambda^k(\mathbb{C}^n)$ は $O(n)$ の表現である．他の既約表現もそのテンソル積を考えて分解すればよい．異なるのは $\Lambda^n(\mathbb{C}^n)$ は $SO(n)$ の自明表現であるが $O(n)$ の表現としては自明でない．また体積要素を定めることができないので $n = 2m$ のときの $\Lambda^m = \Lambda^m_+ \oplus \Lambda^m_-$ という分解はできない.（横田一郎「群と表現」p206 に $O(n)$ の表現環の結果が載ってる）.

Example 2.2. $GL(n, \mathbb{R})$ の $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ への表現を考える．$CO(n) \subset GL(n, \mathbb{R})$ であるので，$CO(n)$ へ制限することができる．このとき k 回テンソルしているので，共形重みは k である．また $(\mathbb{R}^n)^*$ への表現を考えた場合には $\rho(g) = {}^t g^{-1}$ であるので共形重みは -1 である．同様に $\Lambda^k((\mathbb{R}^n)^*)$ の共形重みは $-k$ となる．

さて，リーマン多様体 (M, g) および M に対する正規直交フレーム束 $\mathbf{O}(M)$ を考える．リーマン計量を次のように共形変形する：

$$g' = \exp(2\sigma)g, \quad \sigma \in C^\infty(M).$$

このとき (M, g') というリーマン多様体及び正規直交フレーム束 $\mathbf{O}(M)'$ を得る．g に対する正規直交フレームを $\{e_i\}_i$ とすれば，g' に対する正規直交フレームは $\{e'_i = e^{-\sigma}e_i\}_i$ となる．そこで M 上の主 $SO(n)$ 束の同型

$$\Phi : \mathbf{O}(M) \ni p = (e_1, \cdots, e_n) \mapsto p' = e^{-\sigma}p = (e'_1, \cdots, e'_n) \in \mathbf{O}(M)'$$

を得る．この同型を使って接束の同型を作ってみる．$\{e_i\}$ を $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底とすれば，

$$\Phi : T(M) = \mathbf{O}(M) \times_\rho \mathbb{R}^n \ni e_i(x) = [p, e_i] \mapsto e'_i(x) = [p', e_i] \in \mathbf{O}(M)' \times_\rho \mathbb{R}^n = T(M)$$

となり，恒等写像とはならない．同様にして $\mathbf{CO}(M) \times_\rho \mathbb{R}^n$ は接束にはならないことがわかる．接束を作るには共形重みを考える必要があり，

$$T(M) = \mathbf{CO}(M) \times_{(\rho,1)} \mathbb{R}^n$$

とするのが正しい．実際

$$e_i(x) = [p, e_i] = [pe^{-\sigma}, e^{\sigma} e_i] = [p', e^{\sigma} e_i] = e^{\sigma} e_i'(x) = e_i(x)$$

となる．同様にして，

$$\Lambda^k(M) = \mathbf{CO}(M) \times_{(\Lambda^k, -k)} \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$$

となる．

Remark 2.6. $\mathbb{R}$ への $CO(n)$ の表現 $a \mapsto a^m$ を考え，その同伴束を $\mathbf{\Lambda}(m)$ と書けば，この同伴束を $\mathbf{O}(M)$ の同伴束にテンソル積することで $\mathbf{CO}(M)$ の同伴束を得ることができる．このような同伴束を共形重み m のベクトル束と呼ぶ.

次に**共形変形したときにレビチビタ接続がどのように変化するか**を考えよう.

Proposition 2.8. g のレビチビタ接続を ∇, $g' = e^{2\sigma} g$ のレビチビタ接続を ∇' とする．このとき

$$\nabla'_X Y = \nabla_X Y + (X\sigma)Y + (Y\sigma)X - g(X,Y)\mathrm{grad}\sigma. \tag{2.7}$$

ここで $\mathrm{grad}\sigma$ は 1-*from* $\nabla\sigma$ を計量 g によってベクトル場とみなしたもの：

$$\mathrm{grad}\sigma := \sum (e_i\sigma)e_i$$

（grad は計量 g に依存したものである）.

Proof. まず $\mathrm{grad}\sigma$ の定義から，$Z = \sum Z^i e_i$ とすれば

$$Z\sigma = \sum Z^i(e_i\sigma) = g(\sum (e_i\sigma)e_i, \sum Z^j e_j) = g(\mathrm{grad}\sigma, Z)$$

である．レビチビタ接続の定義を思い出す

$$\begin{aligned}2g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y,Z) + Yg(X,Z) - Zg(X,Y) \\ &+g([X,Y],Z) + g([Z,X],Y) - g(X,[Y,Z]), \quad \forall Z\end{aligned}$$

そこで

$$\begin{aligned}
&2g'(\nabla'_X Y, Z) \\
=&Xg'(Y,Z) + Yg'(X,Z) - Zg'(X,Y) \\
&+ g'([X,Y],Z) + g'([Z,X],Y) - g'(X,[Y,Z]) \\
=&2(X\sigma)e^{2\sigma}g(Y,Z) + e^{2\sigma}Xg(Y,Z) + 2(Y\sigma)e^{2\sigma}g(X,Z) + e^{2\sigma}Yg(X,Z) \\
&- 2(Z\sigma)e^{2\sigma}g(X,Y) - e^{2\sigma}Zg(X,Y) + e^{2\sigma}g([X,Y],Z) + e^{2\sigma}g([Z,X],Y) - e^{2\sigma}g(X,[Y,Z]) \\
=&2e^{2\sigma}g(\nabla_X Y, Z) + 2(X\sigma)e^{2\sigma}g(Y,Z) + 2(Y\sigma)e^{2\sigma}g(X,Z) - 2(Z\sigma)e^{2\sigma}g(X,Y)
\end{aligned}$$

よって

$$g(\nabla'_X Y - \nabla_X Y, Z) = g((X\sigma)Y, Z) + g((Y\sigma)X, Z) - g(X,Y)g(\mathrm{grad}(\sigma), Z)$$

を得る．これより (2.7) を得る． ■

Lemma 2.9. 二つの線形接続（フレーム上の接続）の差は $(1,2)$-*type* テンソルである．そこで $\nabla'_Y X = \nabla_Y X + C(X,Y)$ とすれば，曲率の関係式は，

$$
\begin{aligned}
R'(X,Y)Z = R(X,Y)Z &+ (\nabla_X C)(Y,Z) - (\nabla_Y C)(X,Z) \\
&+ C(X, C(Y,Z)) - C(Y, C(X,Z))
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

となる．

Proof. 曲率の定義に代入して直接計算すればよい． ■

式 (2.7) を (2.8) へ代入する．

Lemma 2.10. ∇ の曲率を R，∇' の曲率を R' とする．このとき

$$
\begin{aligned}
&g(R'(X,Y)Z,W) \\
=&g(R(X,Y)Z,W) + g(Y,W)S(X,Z) - g(X,W)S(Y,Z) \\
&- g(Y,Z)S(X,W) + g(X,Z)S(Y,W) \\
&- \{g(Y,Z)g(X,W) - g(X,Z)g(Y,W)\}g(\mathrm{grad}\sigma, \mathrm{grad}\sigma).
\end{aligned}
$$

ここで S は対称テンソル場で

$$
\begin{aligned}
S(X,Y) &= \nabla_Y \nabla_X \sigma - \nabla_{\nabla_Y X}\sigma - (\nabla_X \sigma)(\nabla_Y \sigma) \\
&= YX\sigma - (\nabla_Y X)\sigma - (X\sigma)(Y\sigma) \\
&= g(X, \nabla_Y \mathrm{grad}\sigma) - g(X, \mathrm{grad}\sigma)g(Y, \mathrm{grad}\sigma)
\end{aligned}
$$

で定義される．

Proof. これも直接計算すればよい． ■

上の対称テンソル S を縮約すれば

$$\sum S(e_i, e_i) = -\Delta\sigma - g(\mathrm{grad}\sigma, \mathrm{grad}\sigma)$$

となる．ここで Δ は関数に作用するラプラス作用素（$\Delta = d^* d$）．また曲率テンソルを正規直交基底によって添え字で書けば，

$$
\begin{aligned}
e^{2\sigma} R'_{ijkl} =&e^{2\sigma} g'(R'(e^{-\sigma}e_i, e^{-\sigma}e_j)e^{-\sigma}e_k, e^{-\sigma}e_l) = g(R'(e_i,e_j)e_k, e_l) \\
=&R_{ijkl} + \delta_{jl}S_{ik} - \delta_{il}S_{jk} - \delta_{jk}S_{il} + \delta_{ik}S_{jl} - \{\delta_{jk}\delta_{il} - \delta_{ik}\delta_{jl}\}\|\mathrm{grad}\sigma\|^2
\end{aligned}
$$

となるので縮約すれば

$$
\begin{aligned}
e^{2\sigma} R'_{ij} &= R_{ij} - (n-2)S_{ij} + (\Delta\sigma - (n-2)\|\mathrm{grad}\sigma\|^2)\delta_{ij}, \\
e^{2\sigma}\kappa' &= \kappa + 2(n-1)\Delta\sigma - (n-1)(n-2)\|\mathrm{grad}\sigma\|^2
\end{aligned}
$$

となる．$(0,4)$ テンソル W の共形変形による変化は，面倒だが直接計算することにより $W' = e^{2\sigma}W$ と共形共変になることがわかる．つまり添え字で書けば

$$W'_{ijkl} = W'(e'_i, e'_j, e'_k, e'_l) = e^{2\sigma}W(e'_i, e'_j, e'_k, e'_l) = e^{-2\sigma}W_{ijkl}$$

が成立する．

Remark 2.7. 計量によって $(1,3)$ テンソルにすれば $W' = W$ がなりたつ．つまり W は共形不変.

以上をまとめると

Proposition 2.11. リーマン曲率テンソル，リッチ曲率，スカラー曲率，共形ワイルテンソルの共形変形による変化は次のようになる.

$$
\begin{gathered}
e^{2\sigma}R'_{ijkl} = R_{ijkl} + \delta_{jl}S_{ik} - \delta_{il}S_{jk} - \delta_{jk}S_{il} + \delta_{ik}S_{jl} - \{\delta_{jk}\delta_{il} - \delta_{ik}\delta_{jl}\}\|\mathrm{grad}\sigma\|^2, \\
e^{2\sigma}R'_{ij} = R_{ij} - (n-2)S_{ij} + (\Delta\sigma - (n-2)\|\mathrm{grad}\sigma\|^2)\delta_{ij}, \\
e^{2\sigma}\kappa' = \kappa + 2(n-1)\Delta\sigma - (n-1)(n-2)\|\mathrm{grad}\sigma\|^2, \\
e^{2\sigma}W'_{ijkl} = W_{ijkl}.
\end{gathered}
$$

共形変形によって外微分 d や余微分 d^* がどのように変化するかを見ていこう．外微分は計量によらずに定義できるので，共形変形しても同じ微分作用素を与える．しかし d^* は計量に依存する一階微分作用素である．以下では多様体は向きつきとする.

ω^i をある計量 g に関す orthonormal coframe とする．$\theta, \eta \in \Lambda^k(M)$ を,

$$
\theta = \frac{1}{k!}\sum \theta_{i_1\cdots i_k}\omega^{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_k}
$$

と表示したとき, 内積は

$$
(\theta, \eta) = \frac{1}{k!}\sum_{i_1\cdots i_k}^{n} \theta_{i_1\cdots i_k}\eta_{i_1\cdots i_k}
$$

として定めるのであった．よって g' に対しては,

$$
\theta = \frac{1}{k!}\sum \theta_{i_1\cdots i_k}e^{-k\sigma}e^{\sigma}\omega^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{\sigma}\omega^{i_k}
$$

$$
(\theta, \eta)' = \frac{1}{k!}\sum_{i_1\cdots i_k}^{n} e^{-k\sigma}\theta_{i_1\cdots i_k}e^{-k\sigma}\eta_{i_1\cdots i_k} = e^{-2k\sigma}(\theta, \eta)
$$

となる．また **Hodge $*$ 作用素** $* : \Lambda^k \to \Lambda^{n-k}$ の定義は,

$$
\theta\wedge *\eta = (\theta, \eta)\mathrm{vol} = (\theta, \eta)\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^n
$$

よって,

$$
\theta\wedge *'\eta = (\theta, \eta)'\mathrm{vol}' = e^{-2k\sigma}(\theta, \eta)e^{n\sigma}\mathrm{vol} = e^{(-2k+n)\sigma}\theta\wedge *\eta
$$

となる.

Lemma 2.12. ホッジ作用素は共形変形によって次のように変化する.

$$
' = e^{(-2k+n)\sigma} : \Lambda^k \to \Lambda^{n-k}
$$

Remark 2.8. $*^2 = (-1)^{k(n-k)}$ であったが,

$$*'*' = e^{(-2k+n)\sigma} e^{(-2(n-k)+n)\sigma} * * = ** = (-1)^{k(n-k)}$$

となるので矛盾しない.

そこで, 余微分

$$d^* := (-1)^{nk+n+1} * d* = \sum -\iota(e_i)\nabla_{e_i} : \Gamma(\Lambda^k(M)) \to \Gamma(\Lambda^{k-1}(M))$$

の変化を見てみる．まず

$$\begin{aligned}
(d^*)'\theta &= (-1)^{nk+n+1} *' d *' \theta \\
&= (-1)^{nk+n+1} * e^{(2k-n-2)\sigma} d(* e^{(-2k+n)\sigma}\theta) \\
&= e^{(2k-n-2)\sigma}(-1)^{nk+n+1} * d * e^{(-2k+n)\sigma}\theta \\
&= e^{(2k-n-2)\sigma} d^* e^{(-2k+n)\sigma}\theta \\
&= e^{-2\sigma} d^*\theta - e^{(2k-n-2)\sigma}(-2k+n)e^{(-2k+n)\sigma}\iota(\mathrm{grad}\sigma)\theta \\
&= e^{-2\sigma}(d^*\theta - (n-2k)\iota(\mathrm{grad}\sigma)\theta)
\end{aligned}$$

であるので

$$\begin{aligned}
(d^*)' e^{m\sigma}\theta &= e^{-2\sigma}(d^* e^{m\sigma}\theta - (n-2k)\iota(\mathrm{grad}\sigma)e^{m\sigma}\theta) \\
&= e^{(m-2)\sigma}(d^*\theta - m\iota(\mathrm{grad}\sigma)\theta - (n-2k)\iota(\mathrm{grad}\sigma)\theta) \\
&= e^{(m-2)\sigma}(d^*\theta - (m+n-2k)\iota(\mathrm{grad}\sigma)\theta)
\end{aligned}$$

となる．そこで $m = -(n-2k)$ とすれば

$$(d^*)' e^{-(n-2k)\sigma}\theta = e^{-(n-2k+2)\sigma} d^*\theta$$

を得る.

Proposition 2.13. 共形変形による外微分，余微分の変化はつぎのようになる.

$$\begin{aligned}
d' &= d, \\
(d^*)' &= e^{(-n+2k-2)\sigma} \circ d^* \circ e^{(n-2k)\sigma}.
\end{aligned}$$

計量から定まる微分作用素 A に対して，共形変形 $g' = e^{2\sigma} g$ とした計量 g' から定まる微分作用素を A' とする．このとき

$$A' = e^{k\sigma} \circ A' \circ e^{l\sigma}, \quad \exists k, l \in \mathbb{R}$$

となる微分作用素を**共形共変微分作用素**とよぶ．そこで**外微分，余微分は共形共変一階微分作用素**である.

次に共形変形によってラプラス作用素 $\Delta = dd^* + d^*d$ がどのように変化するかを見ていこう．我々がここで考えるのは関数に作用するラプラシアンである．

Remark 2.9. $\Lambda^k(M)$ 上で共形共変ラプラシアンを構成するには，共形キリング作用素という共形共変一階微分作用素も使う必要がある．Branson により既約同伴ベクトル束上で共形共変二階微分作用素は分類されている「second order conformal covariants」(1998, Proceedings of AMS)．これはそれほど難しい話ではない．しかし，さらに高階の共形共変微分作用素を構成するのは非常に難しい．関数上の高階共形共変ラプラシアンでさえ構成は難しく，Branson, Eastwood, Fefferman, Gover, Graham, Hirachi などにより研究されている．

関数へ作用するラプラシアンを共形変形すれば，

$$\Delta'\phi = (d^*)'d\phi = e^{-2\sigma}(\Delta\phi - (n-2)\iota(\mathrm{grad}\sigma)d\phi)$$

となる．このように**共形共変微分作用素を合成しても共形共変とはならない**．そこでスカラー曲率による補正項を入れる．ϕ を $e^{m\sigma}\phi$ にかえると，

$$\begin{aligned}
&e^{-m\sigma}(d^*)'de^{m\sigma}\phi \\
=&e^{-m\sigma}(d^*)'(me^{m\sigma}\phi d\sigma + e^{m\sigma}d\phi) \\
=&-m^2\phi\iota(\mathrm{grad}'\sigma)d\sigma - m\iota(\mathrm{grad}'\phi)d\sigma + m\phi(d^*)'d\sigma - m\iota(\mathrm{grad}'\sigma)d\phi + (d^*)'d\phi \\
=&-m^2e^{-2\sigma}\|\mathrm{grad}\sigma\|^2\phi - 2me^{-2\sigma}g(\mathrm{grad}\phi, \mathrm{grad}\sigma) \\
&+ me^{-2\sigma}(\Delta\sigma - (n-2)\|\mathrm{grad}\sigma\|^2)\phi + e^{-2\sigma}(\Delta\phi - (n-2)g(\mathrm{grad}\phi, \mathrm{grad}\sigma)) \\
=&e^{-2\sigma}\Delta\phi + me^{-2\sigma}(\Delta\sigma - ((n-2)+m)\|\mathrm{grad}\sigma\|^2)\phi - (2m+n-2)e^{-2\sigma}(\mathrm{grad}\phi, \mathrm{grad}\sigma)
\end{aligned}$$

そこで $m = -\frac{n-2}{2}$ とすると，

$$\begin{aligned}
e^{-m\sigma}\Delta'e^{m\sigma}\phi &= e^{-2\sigma}\Delta\phi - \frac{n-2}{4}e^{-2\sigma}(2\Delta\sigma - (n-2)\|\mathrm{grad}\sigma\|^2)\phi \\
&= e^{-2\sigma}\Delta\phi - \frac{n-2}{4(n-1)}(\kappa' - e^{-2\sigma}\kappa)\phi
\end{aligned}$$

となる. よって,

Proposition 2.14. ラプラシアンをスカラー曲率で次のようにずらす：

$$L := \Delta + \frac{n-2}{4(n-1)}r.$$

これを**山辺ラプラシアン**または**共形ラプラシアン**とよぶ．この作用素は共形変形によってつぎのように変化する：

$$e^{\frac{n+2}{2}\sigma} \circ (\Delta' + \frac{n-2}{4(n-1)}r') \circ e^{-\frac{n-2}{2}\sigma} = \Delta + \frac{n-2}{4(n-1)}r.$$

このように**共形ラプラシアンは共形共変二階微分作用素**である．

Remark 2.10. 共形微分作用素で大事なことは，作用素に対する解空間

$$\ker A := \{\phi \mid A\phi = 0\}$$

が共形変形しても同型（$e^{-l\sigma}\ker A = \ker A'$）であることである．特に $\dim\ker A < \infty$ なら $\dim\ker A = \dim\ker A'$ となる．その意味で $A\phi = 0$ という方程式を共形不変な方程式とよぶ．例えば，一般相対論におけるスカラー場の方程式 $(\Delta + \frac{n-2}{4(n-1)}r)\phi = 0$ は共形不変である．

このsubsectionの最後に山辺問題について触れる．共形ラプラシアンは山辺の問題や山辺不変量などを論じる際にでてくる作用素である．山辺の問題とは $n \geq 3$ として**「スカラー曲率を共形変形によって定数にできるか？」**という問題であり，**非線形偏微分方程式**の解の存在に対する問題である．

リーマン計量を共形変形したときのスカラー曲率の変化は

$$e^{2\sigma}\kappa' = \kappa + 2(n-1)\Delta\sigma - (n-1)(n-2)\|\mathrm{grad}\sigma\|^2,$$

であった．そこで $n \geq 3$ として $e^{2\sigma} = \phi^{\frac{4}{n-2}}$ とする（$\sigma = \frac{2}{n-2}\log\phi$）．このとき

$$\mathrm{grad}\sigma = \frac{2}{n-2}\mathrm{grad}\log\phi = \frac{2}{n-2}\phi^{-1}\mathrm{grad}\phi,$$

$$\begin{aligned}
\Delta\sigma &= \Delta\frac{2}{n-2}\log\phi = \frac{2}{n-2}d^*(\phi^{-1}d\phi) = -\frac{2}{n-2} * d(\phi^{-1} * d\phi) \\
&= -\frac{2}{n-2} * (-\phi^{-2}d\phi \wedge *d\phi + \phi^{-1}d * d\phi) \\
&= \frac{2}{n-2}\phi^{-1}\Delta\phi + \frac{2}{n-2}\phi^{-2} * (d\phi \wedge *d\phi) = \frac{2}{n-2}\phi^{-1}\Delta\phi + \frac{2}{n-2}\phi^{-2}\|\mathrm{grad}\phi\|^2
\end{aligned}$$

となるので，

$$\begin{aligned}
\phi^{\frac{4}{n-2}}\kappa' &= \kappa + \frac{4(n-1)}{n-2}\phi^{-1}\Delta\phi + \frac{4(n-1)}{n-2}\phi^{-2}\|\mathrm{grad}\phi\|^2 - \frac{4(n-1)}{(n-2)}\phi^{-2}\|\mathrm{grad}\phi\|^2 \\
&= \kappa + \frac{4(n-1)}{n-2}\phi^{-1}\Delta\phi
\end{aligned}$$

つまり

$$(\Delta + \frac{n-2}{4(n-1)}\kappa)\phi = \frac{n-2}{4(n-1)}\kappa'\phi^{\frac{n+2}{n-2}}$$

と書き換えることができる．そこで $\kappa' = const$ として，この非線形偏微分方程式をを解ければ，山辺問題を解けることになる．この問題はYamabe, Trüdinger, Aubinらにより研究され，最終的にはSchoen(1984)によって**肯定的に解かれている**．$n = 2$ の場合を考えると，スカラー曲率はガウス曲率の2倍だったので（$\kappa = 2K$）

$$\Delta\sigma + K - K'e^{2\sigma} = 0$$

という非線形問題になる（オイラー数が正，零，負によって解けるための条件が変化する）．これら山辺問題に対する詳細は T. Aubin 「some nonlinear problems in Riemannian geomery」(springer1998）や Schoen and Yau 「Lectures on Differential geometry」(International Press 1994) などがよい．Aubin の本では「与えられた定数とは限らない関数 κ' に対して，共形変形によってスカラー曲率を κ' にすることができるか？」というより一般的な問題や関連する問題も載っている．

Remark 2.11. **コンパクト連結多様体には，スカラー曲率が負の定数となる計量は必ず存在**する．また，スカラー曲率が非負かつ恒等的に零でないような計量が入るなら，スカラー曲率が正の定数となる計量が存在．しかし，正のスカラー曲率が入るか？という問題は非常に難しい問題である．

2.5 同伴束上の共変微分

正規直交フレーム束の同伴束 $\mathbf{V} := \mathbf{O}(M) \times_\rho V$ を考える．このとき共変微分や曲率は

$$\nabla = d + \frac{1}{2}\sum_{1\le i,j\le n} g(\nabla e_i, e_j)\rho_*(e_i \wedge e_j),$$
$$R_\rho(X,Y) = \frac{1}{2}\sum_{i,j} g(R(X,Y)e_i, e_j)\rho_*(e_i \wedge e_j)$$

となる．もちろん，これらの表示は $\mathbf{O}(M)$ の局所切断 $(e_1, \cdots, e_n)$ からみちびかれる $\mathbf{V}$ の局所フレームに関する表示である．また $e_i \wedge e_j \in \Lambda^2(M) \simeq \mathbf{O}(M) \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{so}(n)$ とみている．

Remark 2.12. 上の式から

$$R_\rho(e_i, e_j) = \frac{1}{2}\sum_{k,l} R_{ijkl}\rho_*(e_k \wedge e_l)$$

となるが，$R_{ijkl} = W_{ijkl} + K_{ijkl} + S_{ijkl}$ を代入して計算すれば，

$$\begin{aligned} &R_\rho(e_i, e_j) \\ =& -\frac{\kappa}{n(n-1)}\rho_*(e_i \wedge e_j) + \sum_k (E_{ik}\rho_*(e_k \wedge e_j) - E_{jk}\rho_*(e_k \wedge e_i)) + \frac{1}{2}\sum_{kl} W_{ijkl}\rho_*(e_k \wedge e_l) \end{aligned}$$

という表示を得る．この表示は $\sum \rho_*(e_k \wedge e_l) R_\rho(e_k, e_l)$ という曲率作用を論じるときに使える．(Y. Homma「Bochner-Wetizenböck formulas and curvature actions」(Trans. AMS 2005）をみよ）

曲率は $R_\rho(X,Y)=\nabla_X\nabla_Y-\nabla_Y\nabla_X-\nabla_{[X,Y]}$ で定義されるのであった.
ベクトル場 X,Y に対して

$$\nabla^2_{X,Y}:=\nabla_X\nabla_Y-\nabla_{\nabla_X Y}$$

として，二階微分作用を定義する（$\nabla^2_{fX,gY}=fg\nabla^2_{X,Y}$ となることに注意）．この二階微分作用素を使えば，リーマン曲率は

$$R_\rho(X,Y)=\nabla^2_{X,Y}-\nabla^2_{Y,X}$$

となる（レビチビタ接続なので $[X,Y]=\nabla_X Y-\nabla_Y X$ を使った）．

Definition 2.4. 同伴束上で

$$\nabla^*\nabla=-\sum_i\nabla^2_{e_i,e_i}$$

として二階微分作用素を得る．これを**接続ラプラシアン（connection Laplacian）または rough Laplacian** とよぶ.

Example 2.3. $\Lambda^0(M)$ 上なら $d^*d=\Delta=\nabla^*\nabla$ となるが，微分形式上ではラプラシアン $dd^*+d^*d\neq\nabla^*\nabla$ である．実際,

$$dd^*+d^*d-\nabla^*\nabla=(\text{curvature action})$$

となる．このような公式を**ボホナーワイゼンベック公式**と呼ぶ．Section 7 を参照.

上の接続ラプラシアンに関して，いくつかの性質を述べよう．$\mathbf{V}$ のファイバーには V 上の G 不変内積から導かれる内積を入れておく.

Proposition 2.15. (M,g) を向きつきリーマン多様体として，$\nabla^*\nabla$ を同伴ベクトル束 $\mathbf{V}$ 上の *connection Laplacian* とする．このとき次が成立

1. $\nabla^*\nabla$ の主表象は $\sigma_\xi(\nabla^*\nabla)=\|\xi\|^2\mathrm{id}$ となる．特に楕円型である.
2. 同伴束の切断の空間 $\Gamma(\mathbf{V})$ に内積を

$$(\phi,\psi)=\int_M\langle\phi,\psi\rangle vol$$

としていれる．ただし ϕ,ψ のどちらかは *compact support* を持つとする．また $\Gamma(\mathbf{V}\otimes T^*M)$ にも同様にして内積を入れる．このとき

$$(\nabla^*\nabla\phi,\psi)=(\nabla\phi,\nabla\psi)$$

が成立する.

3. $\nabla^*\nabla$ は *formally self-adjoint* な作用である．つまり

$$(\nabla^*\nabla\phi, \psi) = (\phi, \nabla^*\nabla\psi)$$

が成立．ここで ϕ, ψ のどちらかは *compact support* を持つとする．

4. $\nabla^*\nabla$ は非負の作用である．ここで非負とは $(\nabla^*\nabla\phi, \phi) \geq 0$ のこと．ただし ϕ は *compact support* を持つとする．

5. 多様体をコンパクトとすれば $\nabla^*\nabla\phi = 0$ と $\nabla\phi = 0$（つまり平行切断）は同値（より一般には完備リーマン多様体上の $L^2(M, \mathbf{V})$ 上でも成立）．

上の命題で**主表象**という言葉がでてきたので定義しておく．

Definition 2.5 (主表象)**.** $\mathbf{E}, \mathbf{F}$ を多様体 M 上のベクトル束として，m 階の微分作用素 $P : \Gamma(\mathbf{E}) \to \Gamma(\mathbf{F})$ を考える．局所座標および局所自明化したときに，作用素が

$$P = \sum_{|\alpha| \leq m} P_\alpha(x) \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}$$

と書けたとする，このとき P の**主表象**$\sigma_\xi(P) : \mathbf{E}_x \to \mathbf{F}_x$（for $\xi \in T_x(M)$）を

$$\sigma_\xi(P) := \sqrt{-1}^m \sum_{|\alpha| = m} P_\alpha(x)\xi^\alpha, \quad \text{for } \xi = \sum \xi^k dx_k$$

と定める．この定義は座標の取り方によらず well-defined であり，$\{\sqrt{-1}^m P_\alpha\}_{|\alpha|=m}$ は $\Gamma(\odot^m TM \otimes \mathrm{Hom}(\mathbf{E}, \mathbf{F}))$ の元 $\sigma(P)$ を与える．

さらに作用素が**楕円型作用素**とは $\sigma_\xi(P)$ が $\xi \neq 0$ に対して同型写像となること（楕円型なら $\mathbf{E}$ と $\mathbf{F}$ のベクトル束のランクは等しい場合）．

Proof of Proposition. 1. $\nabla^*\nabla$ の局所表示は

$$-\sum g^{ij} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + \cdots,$$

よって $\sigma_\xi(\nabla^*\nabla) = \|\xi\|^2$ である．

2. $x \in M$ を固定する．$(\nabla e_i)_x = 0$ となる局所正規直交フレーム $(e_1, \cdots, e_n)$ をとる．このとき点 x において，

$$\begin{aligned}
\langle \nabla^*\nabla\phi, \psi \rangle &= -\sum_i \langle \nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\phi, \psi \rangle \\
&= -\sum_i \{e_i\langle \nabla_{e_i}\phi, \psi \rangle - \langle \nabla_{e_i}\phi, \nabla_{e_i}\psi \rangle\} \qquad (2.9) \\
&= -div(V) + \langle \nabla\phi, \nabla\psi \rangle
\end{aligned}$$

となる．ここで V は $g(V,W) = \langle \nabla_W \phi, \psi \rangle$（$\forall W$）によって定まるベクトル場であり,

$$div(V) = \sum_i g(\nabla_{e_i} V, e_i) = \sum e_j g(V, e_i) = \sum e_i \langle \nabla_{e_i} \phi, \psi \rangle.$$

Remark 2.13. ベクトル場の発散は一般に体積要素があれば定まるものである．この発散が上のように共変微分でかけるには $\nabla vol = 0$, torsion tensor が零が必要であることに注意．しかし我々が考える共変微分はレビチビタ接続のことが多いので，上の式を発散の定義と思ってもよいであろう．

式 (2.9) において積分をとれば，発散定理から $div(V)$ の部分は消える．よって $(\nabla^* \nabla \phi, \psi) = (\nabla \phi, \nabla \psi)$ が成立．発散定理は Section 4 で証明する．

3. 上と同様の議論により $(\nabla^* \nabla \phi, \psi) = (\phi, \nabla^* \nabla \psi)$ が成立する．

4. $(\nabla^* \nabla \phi, \phi) = \|\nabla \phi\|^2 \geq 0$ である．

5. $\nabla \phi = 0$ なら $\nabla^* \nabla = -\sum_i \nabla^2_{e_i, e_i}$ であるので $\nabla^* \nabla \phi = 0$ となる．逆に $\nabla^* \nabla \phi = 0$ とすると，$\|\nabla \phi\|^2 = 0$ が成立する．多様体がコンパクトであるので $\nabla \phi = 0$ を意味する．コンパクトでなく完備リーマン多様体の場合には，解析的な準備（例えば $\nabla^* \nabla$ **が本質的自己共役作用素である**ことなど）が必要なので省略する．それほど難しくはない．[8] や [13] を参照．

■

この subsection で述べたことは $\mathbf{Spin}(M)$ の同伴束上でスピン接続からみちびかれる共変微分に対しても同様のことが成立する．

3 スピン接続

この章ではレビチビタ接続から導かれるスピン接続について考える．

3.1 スピン接続

(M, g) をスピン多様体として $\mathbf{Spin}(M)$ をスピン構造とする．$\mathbf{SO}(M)$ 上には標準的な接続としてレビチビタ接続が存在した．この接続を主 $Spin(n)$ 束である $\mathbf{Spin}(M)$ 上の接続へ lift させよう．レビチビタ接続は $\mathbf{SO}(M)$ 上の $\mathfrak{so}(n)$ 値 1-from である．これを A_{LC} とかく．$\Phi : \mathbf{Spin}(M) \to \mathbf{SO}(M)$ という二重被覆を考えて，A_{LC} を引き戻せば $\mathbf{Spin}(M)$ 上の $\mathfrak{so}(n)$ 値 1-from $\Phi^* A_{LC}$ を得る．$\mathfrak{so}(n) \simeq \mathfrak{spin}(n)$ であるので $\mathfrak{spin}(n)$ 値 1-from である．さらにこの 1-form は接続の条件を満たすことがわかる．**この接続を A^{spin} と書きスピン接続**とよぶ．

Proof. まず $SO(n)$ の $\mathfrak{so}(n)$ への随伴表現は $\Lambda^2(\mathbb{R}^n)$ への表現と同値である．また $\mathfrak{so}(n) \simeq \mathfrak{spin}(n)$ の対応は

$$\mathfrak{so}(n) \ni e_i \wedge e_j \mapsto \frac{1}{4}[e_i, e_j] \in \mathfrak{spin}(n)$$

であった．そこで，$g \in Spin(n)$ とすれば，

$$\mathrm{Ad}(g)(\frac{1}{4}[e_i, e_j]) = \frac{1}{4}[ge_ig^{-1}, ge_jg^{-1}] \mapsto \mathrm{Ad}(g)e_i \wedge \mathrm{Ad}(g)e_j$$

となる．つまり $Spin(n)$ の $\mathfrak{spin}(n)$ への表現は $SO(n)$ の表現へと落ち，$\mathfrak{so}(n)$ への随伴表現となる．そこで A_{LC} を

$$A_{LC} = \sum_{i<j} A_{ij} \otimes e_i \wedge e_j$$

とすれば，スピン接続は

$$\Phi^* A_{LC} = \frac{1}{4}\sum_{i<j} \Phi^* A_{ij} \otimes [e_i, e_j]$$

となる．これがちゃんと接続になってることを証明しよう．まず $g \in Spin(n)$ に対して

$$\begin{aligned}
(g \cdot \Phi^* A_{LC})(X) &= \frac{1}{4}\sum_{i<j} R_g^* \Phi^* A_{ij}(X) \otimes \mathrm{Ad}(g)[e_i, e_j] \\
&= \frac{1}{4}\sum_{i<j} A_{ij}(\Phi_*(R_g)_* X) \otimes \mathrm{Ad}(g)[e_i, e_j] \\
&= \frac{1}{4}\sum_{i<j} A_{ij}((R_{\mathrm{Ad}(g)})_* \Phi_* X) \otimes \mathrm{Ad}(g)[e_i, e_j] \qquad \text{(スピン構造の定義から)} \\
&= \frac{1}{4}\sum_{i<j} A_{ij}(X) \otimes [e_i, e_j] \quad \text{（A_{LC} が $\mathbf{SO}(M)$ の接続であることから）} \\
&= \Phi^* A_{LC}(X)
\end{aligned}$$

となる．また $X \in \mathfrak{spin}(n)$ に対して $\Phi^* A_{LC}(X^*) = X$ もすぐに確かめられる．よって接続になる．

Remark 3.1. スピン構造の定義における，作用の可換性（次の図式が可換）を使っていることに注意すべきである．

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{Spin}(M) \times Spin(n) & \xrightarrow{\Phi \times \mathrm{Ad}} & \mathbf{SO}(M) \times SO(n) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathbf{Spin}(M) & \xrightarrow{\Phi} & \mathbf{SO}(M)
\end{array}$$

■

このスピン接続の局所表示を求めよう．$e(x)$ を U 上の $\mathbf{SO}(M)$ 局所切断とする．つまり局所正規直交フレーム $(e_1, \cdots, e_n)$ である．そこで $\mathbf{Spin}(M)$ の局所切断 f で $\Phi(f) = e$ となるものが存在する．このとき $-f$ も $\Phi(-f) = e$ を満たすことに注意する．ここで $-f$ とは $-1 \in Spin(n)$ を f に右からかけたもの．この切断 f によりスピン接続を引き戻せば，スピン接続の定義から

$$A_U^{spin} := \frac{1}{4}\sum_{i<j} g(\nabla e_i, e_j)[e_i, e_j] = \frac{1}{8}\sum_{1\le i,j\le n} g(\nabla e_i, e_j)[e_i, e_j]$$

となる．さらにスピン接続に対する曲率の局所表示は

$$F_U^{spin}(X, Y) = \frac{1}{8}\sum_{1\le i,j\le n} g(R(X,Y)e_i, e_j)[e_i, e_j]$$

また

$$F_U^{spin}(e_i, e_j) = \frac{1}{8}\sum_{1\le i,j\le n} R_{ijkl}[e_k, e_l]$$

となる．

3.2 スピノール束上の共変微分

スピン多様体上のスピノール束 $\mathbf{S} = \mathbf{Spin}(M) \times_\Delta W$ を考える．このスピノール束上にはスピン接続から導かれる共変微分 ∇ が存在する．先ほど与えた $\mathbf{Spin}(M)$ の局所切断 f からスピノール束の局所フレームを得ることができる．スピノール表現空間 W の基底を $\{\phi_i\}_{1\le i\le N}$ とすれば，$\{\phi_i(x) = [f, \phi_i]\}_i$ とすればよい．このとき

$$\nabla \phi_i = \frac{1}{8}\sum_{1\le i,j\le n} g(\nabla e_i, e_j)\pi_\Delta([e_i, e_j])\phi_i$$

となる．スピノール表現の場合には，面倒なので π_Δ を書かずに

$$\nabla \phi_i = \frac{1}{4}\sum_{1\le i,j\le n} g(\nabla e_i, e_j) e_i \cdot e_j \cdot \phi_i$$

と書くことにする．つまりスピノール束での共変微分は

$$\nabla = d + \frac{1}{4}\sum_{1\le i,j\le n} g(\nabla e_i, e_j) e_i \cdot e_j \cdot$$

となる．同様にして曲率は

$$R_\Delta(X, Y) = \frac{1}{4}\sum_{1\le i,j\le n} g(R(X,Y)e_i, e_j) e_i \cdot e_j \cdot = \frac{1}{2}\sum_{1\le i<j\le n} g(R(X,Y)e_i, e_j) e_i \cdot e_j \cdot$$

となる．ここでスピノール束への微分形式の作用だと思うことができ，リーマン曲率を

$$R(X,Y) = \frac{1}{2}\sum_{i,j} g(R(X,Y)e_i, e_j)e_i \wedge e_j = \sum_{i<j} g(R(X,Y)e_i, e_j)e_i \wedge e_j$$

とすれば,

$$R_\Delta(X,Y)\phi = \frac{1}{2}R(X,Y)\cdot\phi$$

となる．

さて，スピノール束にはエルミート内積やクリフォード積などの構造が入るのであった．それらと共変微分の関係を見ていこう．これらはスピン群の作用と可換な構造であるのでスピン接続に関して平行な構造になる．

1. まずエルミート内積を考える．スピン空間にはスピン群の作用と可換な内積が入り，その内積はスピノール束のファイバー内積を与えるのであった．スピン群の作用と可換ということは，そのファイバー内積が平行ということである．よって
$$\nabla_X\langle\phi,\psi\rangle = \langle\nabla_X\phi,\psi\rangle + \langle\phi,\nabla_X\psi\rangle$$
が成立する．

2. 次にクリフォード積を考える．まずクリフォード束$\mathbb{C}l(M) = \mathbf{Spin}(M)\times_{Ad}\mathbb{C}l_n$を考える．クリフォード積はスピン群または直交群の作用と可換であるので，積は$\mathbb{C}l(M)$上の共変微分に対して平行である．つまり$\phi,\psi\in\Gamma(\mathbb{C}l(M))$とすれば
$$\nabla_X(\phi\cdot\psi) = (\nabla_X\phi)\cdot\psi + \phi\cdot\nabla_X\psi$$
が成立する．

3. また∇は$\mathbb{C}l(M) \simeq \Lambda^*(M)\otimes\mathbb{C}$とみなせば$\Lambda^p(M)$を保存する．つまり$\nabla_X\Gamma(\Lambda^p(M))\subset\Gamma(\Lambda^p(M))$である．特に$\mathbb{C}l(M) = \mathbb{C}l^0(M)\oplus\mathbb{C}l^1(M)$という分解も共変微分により保存される．

4. $SO(n)$不変元である$\sqrt{-1}^{[(n+1)/2]}e_1\cdots e_n$に対応した体積要素$\omega$は$\mathbb{C}l(M)$の切断で平行である：
$$\nabla\omega = 0.$$
よって$\mathbb{C}l(M) = \mathbb{C}l^+(M)\oplus\mathbb{C}l^-(M)$という分解も共変微分によって保存される．

5. スピノール束上のクリフォード積も共変微分によって保存される．つまり$\phi\in\Gamma(\mathbb{C}l(M))$, $\psi\in\Gamma(\mathbf{S})$に対して,
$$\nabla_X(\phi\psi) = (\nabla_X\phi)\cdot\psi + \phi\cdot\nabla_X\psi \tag{3.1}$$
が成立する．

6. また $\nabla\omega = 0$ から $\mathbf{S} = \mathbf{S}^+ \oplus \mathbf{S}^-$ という分解も共変微分によって保存される．

7. スピノール束には大域的な実構造や四元数構造が入ったが，これらも $Spin(n)$ の作用と可換な構造であったので共変微分によって保存される．

3.3　スピン接続のホロノミー群

平行スピノールの存在はスピン群のスピノール表現に不変ベクトルがあることを意味する．これはスピン接続のホロノミー群が $Spin(n)$ より，小さくなることになる．このとき，リーマンホロノミー群はどうなるのであろか？．もしかしたら，少しずれがある可能性がある．そこで次の命題が必要である．

Proposition 3.1 (M.Y. Wang, [17])**.** (M, g) をスピン多様体とする．H をレビチビタ接続に関するホロノミー群とする．また $\tilde{H}$ をスピン接続に関するホロノミー群とする．**このとき** M **が平行スピノールを持つとすれば，**H **と** $\tilde{H}$ **は同型である．**

Proof. まず次の可換図式が成立することは明らか．

$$\begin{array}{ccc}
\tilde{H} & \xrightarrow{i} & Spin(n) \\
{\scriptstyle \mathrm{Ad}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Ad}} \\
H & \xrightarrow{i} & SO(n)
\end{array}$$

命題で述べてる同型とは $\mathrm{Ad} : \tilde{H} \to H$ が同型であることを述べている．

まず，Ad が全射であることがわかる．実際，$\mathbf{SO}(M) = \mathbf{Spin}(M) \times_{\mathrm{Ad}} SO(n)$ であり，スピン接続の Ad による微分がレビチビタ接続であるので $\mathrm{Ad}(\tilde{H}) = H$ となる．逆にスピン接続はレビチビタ接続の二重被覆であるので，その ker は $\{1, -1\}$ に含まれる．ここで $\ker = 1$ ということもありえることに注意する．例えば $H = SU(m)$ なら $\mathrm{Ad} : \tilde{H} \to H$ は $SU(m)$ の被覆を与えるが $SU(m)$ は単連結であるので $\tilde{H} = SU(m)$ となる．また逆に $\ker = \{1, -1\}$ となる場合もある．実際，$8k + 4$ 四元数ケーラースピン多様体の場合に $\tilde{H} \subset Sp(n) \times Sp(1)$ であり，$H \subset Sp(n)Sp(1)$ であるが，例えば $\mathbb{H}P^n$ を考えると，$\tilde{H} = Sp(n) \times Sp(1)$，$H = Sp(n)Sp(1)$ となる．よって $\ker = \{1, -1\}$ となる．

さて，M が平行スピノールが存在するとする．このとき $\tilde{H} \subset Spin(n)$ のスピノール表現は固定ベクトル ϕ をもつ．$-1 \in \tilde{H}$ であるとすると，$-\phi \neq \phi$ であるので，固定ベクトルであることに矛盾する．よって平行スピノールが存在するなら $-1 \notin \tilde{H}$ であり，$\mathrm{Ad} : \tilde{H} \to H$ は同型になる．■

4　ディラック作用素

4.1　ディラック作用素の定義

ディラック作用素とは簡単にいえば，二乗すればラプラス作用素になるような一階微分作用素である．

Definition 4.1. スピン多様体上のスピノール束 $\mathbf{S}$ および，スピン接続から導かれる共変微分 ∇ を考える．$\{e_i\}_i$ を局所正規直交フレームとする．このとき一階微分作用素 $D : \Gamma(\mathbf{S}) \to \Gamma(\mathbf{S})$ を次のように定義する．

$$D = \sum e_i \cdot \nabla_{e_i}$$

（$e_i \cdot$ はクリフォード積である）．この微分作用素を**ディラック作用素**とよぶ．

（これが well-defined であることは演習問題）．

Example 4.1. (M, g) としてユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ をとる．このときのスピノール束は自明束 $\mathbb{R}^n \times W_n$ である．またレビチビタ接続はベクトル場を標準座標で $X = \sum x^i \frac{\partial}{\partial x_i}$ と表示すれば

$$\nabla X = \sum \frac{\partial}{\partial x_i} \otimes dx^i \in \Gamma(T(M) \otimes T^*(M))$$

となる（$\{e_i := \partial_i\}_i$ はユークリッド空間では正規直交フレーム）．よって，共変微分作用素は

$$\nabla_{e_i} = \nabla_{\partial_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

となり，ディラック作用素は

$$D = \sum e_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$$

となる．$\nabla e_i = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} = 0$ 及びクリフォード関係式から

$$D^2 = -\sum \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \Delta \mathrm{id} = \nabla^* \nabla$$

となる．このようにディラック作用素は二乗したらラプラシアンとなるものである．

一般のスピン多様体では，多様体が曲がっているので，ラプラシアンと完全には一致せず

$$D^2 = \nabla^* \nabla + \kappa/4$$

という式が成立する．ここで $\nabla^* \nabla$ は接続ラプラシアンであり，κ はスカラー曲率．（これは後で証明する）．

ユークリッド空間で次元が低い場合に考えてみる.「スピン幾何入門１」でみたクリフォード代数の行列表示 $\mathbb{C}l_{2m+1} = \mathbb{C}(2^m) \oplus \mathbb{C}(2^m)$, $\mathbb{C}l_{2m} = \mathbb{C}(2^m)$ を思い出そう．この行列環が作用するベクトル空間 $\mathbb{C}^{2^m}$ をスピノール空間とよび，W_n と書いた.

Example 4.2 ($n = 1$). $\mathbb{C}l_1 = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ であり $e_1 = (-i, i)$ であった．よって

$$D = -i\frac{\partial}{\partial x_1}, \quad i\frac{\partial}{\partial x_i}$$

となる．$\mathbb{C}l_{2m+1} = \mathbb{C}(2^m) \oplus \mathbb{C}(2^m)$ であるので，スピノール空間へのクリフォード作用は二つあり，今の場合には $e_1 = \pm i$ となる．どちらをとっても構わないが，通常 $D = i\frac{\partial}{\partial x_1}$ を採用する．$\mathbb{R}^1$ で考えたが S^1 で考えても同様である．ディラック作用素 D は S^1 上の $\mathbb{C}$ 値関数空間 $C^\infty(S^1)$ に作用する一階微分作用素であり，この D に対する**固有分解はフーリエ展開**となる.

Example 4.3 ($n = 2$ の場合).

$$e_1 = \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = -\sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

として $\mathbb{C}l_2 = \mathbb{C}(2)$ となった．そこで

$$D = e_1\partial x + e_2\partial y = \begin{pmatrix} 0 & \partial x - i\partial y \\ -\partial x - i\partial y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \partial z \\ \partial \bar{z} & 0 \end{pmatrix}$$

となる．つまり $\mathbb{R}^2$ 上で**ディラック作用素 D を考えるということは，$\mathbb{C}$ 上で複素解析を行うこと**に等しい.

Remark 4.1. 「スピン幾何入門１」での行列表示では $e_2 = \sigma_3$ としていた．クリフォード代数と行列環が代数同型であったが，クリフォード代数の行列表示は一つではない．e_1, e_2 の行列表示を変えれば D の表示も変わることに注意する.（$e_2 = -\sigma_3$ としているのは次の $\mathbf{S}^+ \oplus \mathbf{S}^-$ の split を見やすくするためである）.

上の場合には体積要素は

$$ie_1e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

となる．そこで $\mathbf{S} = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{C}^2 = (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{C}) \oplus (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{C}) = \mathbf{S}^+ \oplus \mathbf{S}^-$ と分解されるが，上のように

$$D = \begin{pmatrix} 0 & D^- \\ D^+ & 0 \end{pmatrix}, \quad D^\pm : \Gamma(\mathbf{S}^\pm) \to \Gamma(\mathbf{S}^\mp)$$

となる．一般に，偶数次元スピン多様体上のディラック作用素はこのような off-diagonal 表示ができる.

Remark 4.2. リーマン面では共形構造と複素構造が一致した．リーマン面上の複素解析を高次元化する方法は二種類あり，一つは複素構造の高次元化である，多変数関数論や複素多様体論である．一方で**共形構造の高次元化はディラック作用素の理論**になる．実際，ディラック作用素は共形共変作用素である．

以下でディラック作用素に対する基本的な性質について論じる．

Proposition 4.1. スピン多様体上のスピノール束に定義されたディラック作用素は次をみたす.

1. ディラック作用素の主表象を考えると

$$\sigma_\xi(D) = \sqrt{-1}\xi \cdot \quad \xi \in T^*(M)$$

となる．ただし，我々のクリフォード作用はベクトル場の作用としているのでリーマン計量により $T^*(M) = T(M)$ としている．また $\sigma_\xi(D^2) = \|\xi\|^2 \mathrm{id}$ となる．特に，D と D^2 は**楕円型作用素**である．

2. $\Gamma(\mathbf{S})$ に，内積を

$$(\phi, \psi) = \int_M \langle \phi, \psi \rangle vol$$

で入れる（どちらかは *compact supported*）．このとき

$$(D\phi, \psi) = (\phi, D\psi)$$

が成立する．つまり**形式的自己共役作用素**である．また，M が境界付き多様体の場合には

$$(D\phi, \psi) - (\phi, D\psi) = -\int_{\partial M} \langle \mathbf{n} \cdot \phi, \psi \rangle$$

となる．ここで $\mathbf{n}$ は ∂M への**内向き単位法ベクトル**.

3. $f \in C^\infty(M)$ とすれば

$$D(f\phi) = (\mathrm{grad} f) \cdot \phi + fD\phi$$

が成立.

4. ω を体積要素とすれば,

$$D\omega = (-1)^{n-1}\omega D$$

が成立する．特に M が偶数次元なら

$$D = \begin{pmatrix} 0 & D^- \\ D^+ & 0 \end{pmatrix}, \quad D^\pm : \Gamma(\mathbf{S}^\pm) \to \Gamma(\mathbf{S}^\mp)$$

となる．さらに D^2 は

$$D^2 = \begin{pmatrix} D^-D^+ & 0 \\ 0 & D^+D^- \end{pmatrix}$$

となるので $D^2 : \Gamma(\mathbf{S}^{\pm}) \to \Gamma(\mathbf{S}^{\pm})$ となる．

5. M がコンパクトとすれば，**固有空間分解**が成立する：$L^2(\mathbf{S})$ の完全正規直交基底 ϕ_i で各 ϕ_i がディラック作用素の固有スピノール $D\phi_i = \lambda_i\phi_i$ （$0 \leq |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \cdots$）となるものが存在する．さらに $\lim|\lambda_i| = \infty$ となる．また**各固有スピノールは滑らか**な切断であり，固有値 λ に対する**固有空間は有限次元**である．また $\ker D = \ker D^2 < \infty$ となる．$\ker D$ を**調和スピノールの空間**とよび，$\phi \in \ker D$ を**調和スピノール**と呼ぶ．

6. $\lambda \neq 0$ なら，$\ker(D^2-\lambda^2) = \ker(D-\lambda) \oplus \ker(D+\lambda)$ である．つまり $D^2\phi = \lambda^2\phi$ が成立すれば，$D\phi_{\pm} = \pm\lambda\phi_{\pm}$ なる固有スピノールが存在し，$\phi = \phi_+ + \phi_-$ とかける．(どちらかが零ということもありえる)．

Proof. 1. 主表象は各点できまるものなので点 $x \in M$ を固定する．x の周りの局所座標 $(x_1, \cdots, x_n)$ を $T_x(M)$ で直交化して，$\{(\partial x_i)_x\}_i$ が $T_x(M)$ の正規直交基底と仮定してよい（もちろん点 x においてのみ）．また共変微分は

$$\nabla_{(\partial x_i)_x} = (\frac{\partial}{\partial x_j})_x + \text{zero-order}$$

となる．そこで

$$D = \sum (\partial x_i)_x \cdot \nabla_{(\partial x_i)_x} + \text{zero-order}$$

となる．$\xi = \sum \xi_i (dx^i)_x \in T_x^*(M)$ を $T(M) = T^*(M)$ の同一視でうつせば $(\partial x_i)_x$ が正規直交基底であることから，$\xi = \sum \xi_i (\partial x_i)_x \in T_x(M)$ となる．よって

$$\sigma_\xi(D) = \sqrt{-1}\sum \xi_i (\partial x_i)_x \cdot = \sqrt{-1}\xi \cdot$$

となる．次に D^2 を考える．点 x において $(\nabla e_i)_x = 0$ となるフレームをとることができるので，(3.1) を使えば

$$D^2 = \sum_{i,j} e_i e_j (\frac{\partial^2}{\partial x_i x_j})_x + (\text{lower-order})$$

となる．クリフォード関係式を使えば $\sigma_\xi(D^2) = \|\xi\|^2$ がわかる．

2. $x \in M$ を固定して，この点のまわりの正規直交フレーム $(e_1, \cdots, e_n)$ で $(\nabla e_i)_x = 0$ となるものをとる．このとき，点 x において

$$
\begin{aligned}
\langle D\phi, \psi\rangle &= \sum \langle e_i \nabla_{e_i}\phi, \psi\rangle = -\sum \langle \nabla_{e_i}\phi, e_i\psi\rangle \\
&= -\sum e_i\langle \phi, e_i\psi\rangle - \langle \phi, (\nabla_{e_i} e_i)\cdot\psi\rangle - \langle \phi, e_i\nabla_{e_i}\psi\rangle \\
&= -\sum e_i\langle \phi, e_i\psi\rangle + \sum \langle \phi, e_i\nabla_{e_i}\psi\rangle \\
&= div(V) + \langle \phi, D\psi\rangle
\end{aligned}
$$

ここでベクトル場 V は $g(V, W) = -\langle \phi, W\cdot\psi\rangle$ で定まるものである．このベクトル場の発散は同じ点 x で考えれば,

$$
div(V)_x = \sum g(\nabla_{e_i} V, e_i)_x = \sum e_i g(V, e_i) = -\sum e_i \langle \phi, e_i\cdot\psi\rangle
$$

となる．あとは以下でみる**発散定理**を使えばよい.

Lemma 4.2. 境界付き多様体を考える．$\mathbf{n}$ を内向き単位法ベクトルとする．このとき

$$
\int_M div(V) vol_M = \int_{\partial M} g(V, -\mathbf{n})|_{\partial M} vol_{\partial M}
$$

が成立する．特に境界がなければ $\int_M div(V) vol_M = 0$ となる．

Proof. $div(X) = \sum g(\nabla e_i X, e_i)$ であった．まず $L_X(vol) = div(X) vol$ を証明しよう．リーマン計量によって $T^*(M) = T(M)$ を同一視して $vol = e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$ となる．局所的にみればよいので $X = \sum X^i e_i$ とし，点 x において $(\nabla e_i)_x = 0$ としておく．このとき

$$
\begin{aligned}
&L_X(e_1\wedge\cdots\wedge e_n) = \sum e_1\wedge\cdots\wedge[X, e_k]\wedge\cdots\wedge e_n \\
=&\sum e_1\wedge\cdots\wedge(\nabla_X e_k - \nabla_{e_k} X)\wedge\cdots\wedge e_n \\
=&-\sum_k e_1\wedge\cdots\wedge\sum_i (e_k X^i) e_i \wedge\cdots\wedge e_n \\
=&-(\sum_k (e_k X^k)) e_1\wedge\cdots\wedge e_k\wedge\cdots\wedge e_n \\
=&\sum_k e_k g(X, e_k) vol = div(X) vol
\end{aligned}
$$

となる．そこで $L_X = d\iota_X + \iota_X d$ より $d\iota_X vol = div(X) vol$ であることがわかる．これを境界つき多様体で積分すればストークスの定理から

$$
\int_M div(X) vol = \int_{\partial M} (\iota_X vol)|_{\partial M}
$$

を得る（特に境界がなければ $\int_M div(X) vol = 0$ を得る)．よって $(\iota_X vol_M)|_{\partial M} = g(X, -\mathbf{n})|_{\partial M} vol_{\partial M}$ を証明すればよい．これも各点で証明すればよいので $\mathbf{n}$

を内向き単位法ベクトルとして，これを拡張して $e_1, \cdots, e_{n-1}, \mathbf{n}$ が正規直交フレームであるとする．このとき向きの入れ方に注意すれば

$$vol_{\partial M} = (-1)^n e_1 \wedge \cdots \wedge e_{n-1}, \quad vol_M = e_1 \wedge \cdots \wedge e_{n-1} \wedge \mathbf{n}$$

となる．

$$\iota_X vol_M = \sum_i (-1)^{i-1} X^i e_1 \wedge \cdots \wedge e_{i-1} \wedge e_{i+1} \wedge \cdots \wedge e_n$$

を ∂M へ制限すれば,

$$(\iota_X vol_M)|_{\partial M} = \sum_i (-1)^{n-1} X^n e_1 \wedge \cdots \wedge e_{n-1} = g(X, -\mathbf{n})|_{\partial M} vol_{\partial M}$$

となるので補題が証明できた． ■

3. 次に $D(f\phi) = (\mathrm{grad} f) \cdot \phi + fD\phi$ を証明しよう．

$$D(f\phi) = \sum e_i \nabla_{e_i} f\phi = \sum_i (e_i f) e_i \cdot \phi + fD\phi = (\mathrm{grad} f) \cdot \phi + fD\phi$$

となる．

4. $\nabla\omega = 0$ であり，$\omega e_i = (-1)^{n-1} e_i \omega$ が成立した．よって $D\omega = (-1)^{n-1}\omega D$ となる．n を偶数とする．$\phi \in \Gamma(\mathbf{S}^{\pm})$，つまり $\omega\phi = \pm\phi$ とする．このとき $\omega(D\phi) = -D\omega\phi = \mp(D\phi)$ であるので $D\phi \in \Gamma(\mathbf{S}^{\mp})$ となる．

5. 楕円型形式的自己共役作用素の一般論から従う．最後にコンパクトなら $\ker D = \ker D^2$ を証明しよう．$\phi \in \ker D^2$ とすると $0 = (D^2\phi, \phi) = (D\phi, D\phi) = \|D\phi\|^2$ より $D\phi = 0$ となる．逆は明らか．

6. $\ker(D - \lambda) \oplus \ker(D + \lambda) \subset \ker(D^2 - \lambda^2)$ は明らかである．逆を証明する．$D^2\phi = \lambda^2\phi$ とすると，

$$D(\lambda\phi \pm D\phi) = \lambda D\phi \pm D^2\phi = \lambda D\phi \pm \lambda^2\phi = \pm\lambda(\lambda\phi \pm D\phi)$$

となる．さらに,

$$\phi = \frac{1}{2\lambda}(\lambda\phi + D\phi) + (\lambda\phi - D\phi)$$

となるので，$\ker(D - \lambda) \oplus \ker(D + \lambda) = \ker(D^2 - \lambda^2)$ となる．もちろん $\dim\ker(D - \lambda)$ と $\dim\ker(D + \lambda)$ が一致するとはかぎらない．また，M がコンパクトなら $\lambda = 0$ でも成立する（つまり，$\ker D = \ker D^2$）．

Remark 4.3. 楕円型作用素であるディラック作用素の解析的な性質は [13] や [21] などを参照．特に指数定理やその一般化を学ぶ際には基本的なことである．

■

Remark 4.4. コンパクト多様体上のラプラシアンのスペクトルは離散的に 0 から $+\infty$ まで分布する．ディラック作用素の場合にはスペクトルは $-\infty$ から $+\infty$ まで分布しているのである（ちゃんと $-\infty$ から $+\infty$ まで分布していることの証明の仕方であるが，$\eta(0)$ が定義されるからというのが一つの方法．何かもっと単純な証明法は？）．このスペクトル分布があるので S^1 ファミリーのディラック作用素に対してスペクトル流が定義できる．

Remark 4.5. 公式 $Df = fD + \mathrm{grad} f$ は一般化することができる．例えば，X をベクトル場とすれば，

$$\begin{aligned} D(X\cdot\phi) &= \sum e_i \nabla_{e_i}(X\cdot\phi) = \sum e_i\cdot(\nabla_{e_i}X)\cdot\phi + \sum e_i\cdot X\cdot\nabla_{e_i}\phi \\ &= \sum e_i\cdot(\nabla_{e_i}X)\cdot\phi - X\cdot D\phi - 2\nabla_X\phi \end{aligned}$$

となる．同様に，微分形式 w（p-form）を作用させれば，

$$\begin{aligned} D(w\cdot\phi) &= \sum e_i\cdot(\nabla_{e_i}w)\cdot\phi + \sum e_i\cdot w\cdot\nabla_{e_i}\phi \\ &= \sum(e_i\wedge\nabla_{e_i}w)\cdot\phi - (i(e_i)\nabla_{e_i}w)\cdot\phi + \sum(e_i\wedge w)\cdot\nabla_{e_i}\phi - \sum(i(e_i)w)\cdot\nabla_{e_i}\phi \\ &= ((d+d^*)w)\cdot\phi + (-1)^p\sum(w\wedge e_i)\cdot\nabla_{e_i}\phi - \sum(i(e_i)w)\cdot\nabla_{e_i}\phi \\ &= ((d+d^*)w)\cdot\phi + \sum w\cdot e_i\cdot\nabla_{e_i}\phi - 2\sum(i(e_i)w)\cdot\nabla_{e_i}\phi \\ &= ((d+d^*)w)\cdot\phi + w\cdot D\phi - 2\sum(i(e_i)w)\cdot\nabla_{e_i}\phi \end{aligned}$$

となる．

4.2 ディラック作用素の指数定理

コンパクトスピン多様体のディラック作用素 D のスペクトル及び kernel について考察する．また，指数定理について結果のみを述べる．

まず，n が偶数の場合を考える．$D\phi = \lambda\phi$ とする．$\phi = \phi_+ + \phi_- \in \mathbf{S}^+ \oplus \mathbf{S}^-$ と分解しておく．そこで

$$\begin{pmatrix} 0 & D^- \\ D^+ & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi_+ \\ \phi_- \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} \phi_+ \\ \phi_- \end{pmatrix}$$

となる．$\tilde{\phi} = \phi_+ - \phi_-$ とすれば，

$$D\tilde{\phi} = \begin{pmatrix} 0 & D^- \\ D^+ & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi_+ \\ -\phi_- \end{pmatrix} = -\lambda\begin{pmatrix} \phi_+ \\ -\phi_- \end{pmatrix} = -\lambda\tilde{\phi}$$

を得る．よって固有値 λ に対する固有空間を E_λ とすれば，$\dim E_\lambda = \dim E_{-\lambda}$ となる．つまり正の固有値と負の固有値は同じ数だけ表れている（**スペクトル対称**）ことを意味する.（スペクトル不変量である eta 不変量 $\eta_D(0)$ が零ということ．η 不変量については Gilkey の本を参照）.

次に D^2 について考えてみる．これは D^-D^+，D^+D^- が diagonal にならぶものであった．D が形式的自己共役作用素であることから $(D^\pm)^* = D^\mp$ がわかる．ここで $(D^\pm)^*$ は $D^\pm$ の形式的随伴作用素である．よって

$$\ker D^+ = \ker D^-D^+, \quad \ker D^- = \ker D^+D^+$$

となる．

$D^-D^+\phi_+ = \mu\phi_+$ とする（D^-D^+ は非負の作用素なのでスペクトルは非負）．また $E_\mu(D^-D^+)$ を固有空間とする．$D^+D^-(D^+\phi_+) = D^+(D^-D^+\phi_+) = \mu(D^+\phi_+)$ となるので，$D^+ : E_\mu(D^-D^+) \to E_\mu(D^+D^-)$ という線形写像を得る．このとき $\mu \neq 0$ なら全単射である．

Proof. $D^+\phi_+ = 0$ なら $D^-D^+\phi = 0$ となるので $\mu \neq 0$ に反する．よって $D^+ : E_\mu(D^-D^+) \to E_\mu(D^+D^-)$ は単射である．また $\phi_- \in E_\mu(D^+D^-)$ とすれば $\mu^{-1}D^-\phi_-$ を考えると $(D^-D^+)(\mu^{-1}D^-\phi_-) = \mu(\mu^{-1}D^-\phi_-)$ であるので $\mu^{-1}D^-\phi_- \in E_\mu(D^-D^+)$ であり $D^+(\mu^{-1}D^-\phi_-) = \phi_-$ となるので $D^+ : E_\mu(D^-D^+) \to E_\mu(D^+D^-)$ は全単射である．ただし $\mu = 0$ では全単射とは限らない． ■

一般に非負の自己共役楕円型微分作用素 $P : \Gamma(\mathbf{V}) \to \Gamma(\mathbf{V})$ に対して，**熱作用素**e^{-tP}（$t > 0$）というものが考えられる．詳しくは述べないが，固有切断 ϕ_λ に対して，$e^{-tP}\phi_\lambda = e^{-t\lambda}\phi_\lambda$ となる作用素である（一般の切断に対しては P に対する固有値分解により展開して定義すればよい）．熱作用素は**熱核という積分核**$K_t(x, y)$ をもつ：

$$(e^{-tP}\phi)(x) = \int_M K_t(x, y)\phi(y)vol_y.$$

この熱作用素の作用素トレース $\mathrm{tr}e^{-tP}$ を考えると

$$\mathrm{tr}e^{-tP} = \int_M \mathrm{tr}_x K_t(x, x)vol = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-t\lambda_i}$$

となる．さて，先ほどの非負自己共役楕円型作用素 D^+D^-, D^-D^+ に対して熱作用トレースを考え，それらの差を考える．零でない固有値のところはキャンセルされるので，

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}e^{-tD^-D^+} - \mathrm{tr}e^{-tD^+D^-} &= (\dim\ker D^+ + \sum_{\mu_i > 0} e^{-\mu_i t}) - (\dim\ker D^- + \sum_{\mu_i > 0} e^{-\mu_i t}) \\
&= \dim\ker D^+ - \dim\ker D^-
\end{aligned}$$

となり t **に依存しない**ことがわかる．そこで**ディラック作用素の指数**を

$$\mathrm{ind}(D) := \dim\ker D^{+} - \dim\ker D^{-} < \infty$$

と定義すれば，

$$\mathrm{ind}(D) = \mathrm{tr}e^{-tD^{-}D^{+}} - \mathrm{tr}e^{-D^{+}D^{-}} = \int_M \mathrm{tr}_x(K_t(x,x)^{+} - K_t(x,x)^{-})vol$$

となる．右辺も t を書いているが t に依存しない量である．そこで $t \to 0$ として t に関して $\mathrm{tr}_x(K_t(x,x)^{+} - K_t(x,x)^{-})vol$ の漸近展開を行う．このとき t に依存しない項のみをとりだすと，$\hat{A}$ 類という TM の特性類を曲率によって実現したともであることがわかる（t が残ってる項は積分したら消える）．特に，$\mathrm{ind}(D)$ は計量やスピン構造によらず多様体 M の位相構造，微分構造のみできまる量である（多様体の向きには依存する）．この事実を**指数定理**とよぶ．

Theorem 4.3 (ディラック作用素に対する指数定理)**.** (M,g) をコンパクト偶数次元スピン多様体として，スピノール束上のディラック作用素 D を考える．

$$\mathrm{ind}(D) := \dim\ker D^{+} - \dim\ker D^{-} < \infty$$

を**解析的指数**とよぶ．このとき次が成立する．

$$\mathrm{ind}(D) = \int_M \hat{\mathbf{A}}(TM) =: \hat{A}(M).$$

ここで $\hat{\mathbf{A}}(TM)$ は接束の $\hat{A}$ **類といわれるものでポントリャーギン類の多項式となる**ものである．また $\hat{A}(M)$ **を** $\hat{A}$***-genus*** とよぶ．

この定理の証明はしない．証明は [21] を見よ．ここでは $\hat{A}$ 類の定義のみしておく，

E を実 oriented な rank $2r$ の実ベクトル束としたとき $p_j(E) = (-1)^j c_{2j}(E \otimes \mathbf{C})$ を **j 次ポントリャーギン類**と呼ぶ．ここで $E \otimes \mathbf{C} = \overline{E \otimes \mathbf{C}}$ であるので c_{2j+1} はきえることに注意. 分解原理（[7]）によれば $E \otimes \mathbf{C} = l_1 \oplus \bar{l}_1 \oplus \cdots \oplus l_r \oplus \bar{l}_r$ より $c(E \otimes \mathbf{C}) = \prod(1 - x_j)(1 + x_j) = \prod(1 - x_j^2)$ となるので，

$$p(E) = \prod(1 + x_j^2), \quad p_j(E) = \sigma_j(x_1^2, \cdots, x_r^2)$$

である. ここで σ_j は基本対称式．前者が全ポントリャーギン類, 後者が j 次ポントリャーギン類. さて，E **の** $\hat{\mathbf{A}}$ **類**を次で定義する．

$$\hat{\mathbf{A}}(E) = \prod \frac{x_j/2}{\sinh(x_j/2)}.$$

分解原理によって定義しているので，わかりずらいかもしれないが，要は上の x_j の多項式を展開して，基本多項式である $p_j(E)$ の多項式で表せばよいのである．具体的には次のようにする．

$$\frac{x/2}{\sinh(x/2)} = 1 - \frac{1}{24}x^2 + \frac{7}{2^7 \cdot 3^2 \cdot 5}x^4 + \cdot$$

となるので

$$\hat{\mathbf{A}}(E) = 1 - \frac{1}{24}p_1(E) + \frac{1}{2^7 \cdot 3^2 \cdot 5}(-4p_2(E) + 7p_1(E)^2) + \cdots$$

となる．

Example 4.4. 4 次元スピン多様体上のディラック作用素を考えると

$$\mathrm{ind}(D) = -\frac{1}{24}p_1(M) = -\frac{1}{8}\sigma(M)$$

ここで $\sigma(M)$ は M の符号数と呼ばれる向きつき多様体の不変量である．

Example 4.5. $\hat{A}$ 類はポントリャーギン類でかけるので，実際には**次数** $4k$ **の微分形式のみ現れる**．よって非自明な量が現れるのは多様体の次元が 4 の倍数のときである．よって $n \equiv 2 \mod 4$ なら $\mathrm{ind}D = 0$ となる．（もちろんこれは通常のスピノール束に対するディラック作用素に対してであり，より一般的な $d + d^*$ などの場合には，偶数次元でも非自明な指数が現れる）．

指数定理は $\dim\ker D^+ - \ker D^-$ を与えるものであった．では，$\dim\ker D^+ + \ker D^-$ はどのような量であろうか？

$$\ker D = \ker D^+ \oplus \ker D^-, \quad \dim\ker D = \dim\ker D^+ + \ker D^- < \infty$$

となるので $\dim\ker D^+ + \ker D^-$ **は調和スピノールの次元**である $\dim\ker D$ に一致する．またこの量は n が奇数の場合でも定義できる．後で述べるように，ディラック作用素は共形共変一階微分作用素であるので $\dim\ker D$ は計量の共形変形によっては変化しない．しかし，**一般に** $\dim\ker D$ **は計量およびスピン構造によって変化する量**であり，多様体の次元によっては，どんなコンパクトスピン多様体上でも $\dim\ker D = 0$ となるような計量を入れることも可能．

Remark 4.6. このような計量を入れる問題は未解決問題である．もともとは Hitchin の「Harmonic spinor」[10] あたりから出てきた問題であり，C. Bär によってさらなる考察が得られたが，完全には解決してない（多様体の次元によって未解決）．

さて，スピノール束に実構造または四元数構造が入る場合を考える．その構造を J とかく．

1. まず，クリフォード積 e_i と反可換な構造が入る場合を考える．このようなことが起こるのは $n \neq 3, 7 \mod 8$ となる場合である．反可換であり $\nabla J = 0$ で

あるので，$DJ = -JD$ となる．よって $D\phi = \lambda\phi$ とすると $D(J\phi) = -JD\phi = -\lambda(J\phi)$ が成立する．よって $\dim E_\lambda = \dim E_{-\lambda}$ となり，正の固有値と負の固有値が同じ数だけ現れる．つまり $n \neq 3, 7 \mod 8$ なら**スペクトル対称**.（よって，eta 不変量 η を考えるべきは $n \equiv 3 \mod 4$ の場合である）.

2. 次にクリフォード積 e_i と可換な構造が入る場合を考える．このようなことが起こるのは $n \neq 1, 5 \mod 8$ となる場合である．可換であり $\nabla J = 0$ であるので，$DJ = JD$ となる．よって $\phi = \lambda\phi$ とすると $D(J\phi) = JD\phi = \lambda(J\phi)$ が成立する．つまり $\dim E_\lambda$ に構造 J が入ることになる．特に**クリフォード積と可換な四元数構造が入れば** $\dim E_\lambda$ **は必ず偶数**.

3. $\ker D$ について考える．J をクリフォード作用素と可換または反可換な構造とする．$D\phi = 0$ なら $DJ\phi = 0$ となるので，$J(\ker D) \subset \ker D$ となる．実際には $J\phi = 0$ とすれば $J^2\phi = \pm\phi = 0$ であるので，$J : \ker D \to \ker D$ は複素歪線形同型である．よって**実または四元数構造** J **は** $\ker D$ **に遺伝する**.

4. n が偶数の場合に $\ker D^\pm$ について考える．$\ker D = \ker D^+ \oplus \ker D^-$ であった．まず $n = 2, 6 \mod 8$ の場合を考える．構造 J はスピノール束 $\mathbf{S}$ に入り，$\ker D$ に遺伝することは見た．しかし J は $\mathbf{S}^\pm$ には入らず，$J : \mathbf{S}^\pm \to \mathbf{S}^\mp$ という複素歪線形同型を与えるのであった．そこで $\phi \in \ker D^+$ とすれば $J\phi \in \mathbf{S}^-$ であり $DJ\phi = \pm JD\phi = 0$ となる．つまり $J : \ker D^+ \to \ker D^-$ という複素歪線形同型を与える．**よって** $n = 2, 6 \mod 8$ **なら** $\dim\ker D^+ = \dim\ker D^-$ **が成立**する．これは $\mathrm{ind}(D) = 0$ であることの別証明である．

   次に $n = 4 \mod 8$ **の場合には**$\mathbf{S}^\pm$ に四元数構造 J が入り，$\ker D^\pm$ にも四元数構造が入る．特に $\dim\ker D^\pm$ **は偶数**である．$n = 8 \mod 8$ なら $\ker D^\pm$ に実構造が入る．

上の考察から $8k+4$ の場合に $\dim\ker D^\pm$ は偶数であるので次は明らか

Proposition 4.4. $8k+4$ **次元微分可能スピン多様体の** $\hat{A}(M)$ **は偶数**である．

この命題の有名な応用を述べよう．

Example 4.6. 4 次元スピン多様体上のディラック作用素を考えると

$$\mathrm{ind}(D) = -\frac{1}{24}p_1(M) = -\frac{1}{8}\sigma(M)$$

であったが $\mathrm{ind}(D)$ は偶数である．**よって** $\sigma(M)$ **は** 16 **の倍数**であることがわかる．これは指数定理を使っているので，**多様体は微分可能多様体**である．つまり，

Proposition 4.5 (Rochlin). コンパクト 4 次元微分可能多様体の符号数は１６の倍数

一方で $w_1(M)=w_2(M)=0$ の位相多様体を考えると $\sigma(M)$ は必ず 8 で割れることが知られている．実際 $\sigma(M)$ **が 8 となる位相多様体が存在する**ことが知られている．この多様体が微分多様体であるなら指数定理が成立するので 16 で割り切れる必要がある．よって，この多様体には微分構造が入らないのである．

Remark 4.7. $8k$ 次元スピン多様体の場合を考えると，スピノール束に実構造が入り，ディラック作用素もスピノール束の実部の作用素とみなせる．このとき指数 $\dim_{\mathbb{R}} \ker(D^+|_{\mathbb{R}}) - \dim_{\mathbb{R}} \ker(D^-|_{\mathbb{R}})$ を考えると，これは $\dim_{\mathbb{C}} \ker D^+ - \dim_{\mathbb{C}} \ker D^-$ と一致する．指数定理は複素ベクトル束に対するものであるが，このような場合には実ベクトル束に対する指数定理となる．

4.3 共形共変性とツイスター作用素

我々はディラック作用素を $D=\sum e_i \nabla_{e_i}$ として定義したが，より自然な定義は**共変微分と射影の合成**である．この定義からツイスター作用素も自然に現れる．

スピノール束上の共変微分 ∇ を思い出す．

$$\nabla : \Gamma(\mathbf{S}) \ni \phi \to \nabla\phi = \sum \nabla_{e_i}\phi \otimes e_i \in \Gamma(\mathbf{S}\otimes T^*(M)) = \Gamma(\mathbf{S}\otimes T(M))$$

であった．このとき次の写像を定義する

$$\Pi_\Delta : \mathbf{S}\otimes T(M) \ni \phi\otimes v \mapsto v\cdot\phi \in \mathbf{S}$$

この写像と共変微分を合成すればディラック作用素になることは明らかである．つまり

$$D = \Pi_\Delta \circ \nabla$$

となる．

そこで Π_Δ の意味を考える．

Lemma 4.6. テンソル積ベクトル束 $\mathbf{S}\otimes T(M)$ は同伴ベクトル束であるが，これを各ファイバーで既約分解すれば，ベクトル束の既約分解

$$\mathbf{S}\otimes T(M) = \mathbf{T}\oplus\mathbf{S}$$

を得る．ここで $\mathbf{T}$ は $\mathbf{S}\otimes T(M)$ の既約成分で $(3/2,(1/2)_{m-1})$ という *highest weight* を持つものである．このベクトル束 $\mathbf{T}$ を**ツイスター束**という（ツイスター空間と混同しては駄目）．

Remark 4.8. より正確には n が奇数なら

$$\mathbf{S}\otimes T(M) = \mathbf{T}\oplus\mathbf{S},$$

n が偶数なら

$$\mathbf{S}^\pm\otimes T(M) = \mathbf{T}^\pm\oplus\mathbf{S}^\mp.$$

ここで $\mathbf{T}^\pm$ の highest weight は $(3/2,(1/2)_{m-2},\pm 1/2)$ である．

Proof. 表現論の一般論から V_ρ を highest weight ρ をもつ $Spin(n)$ の既約表現とする．$V_\rho \otimes V_{\rho'}$ の中には $\rho+\rho'$ を highest weight とする既約成分が唯一つ存在する．また $V_{\rho+\rho'}$ の highest weight vector は $V_\rho, V_{\rho'}$ の highest weight vector $v_\rho, v_{\rho'}$ のテンソル積 $v_\rho \otimes v_{\rho'}$ である．$\mathbf{S}$ の highest weight は $(1/2, \cdots, 1/2)$ であり，$T(M)$ の highest weight は $(1, 0, \cdots, 0)$ である．そこで $\mathbf{S} \otimes T(M)$ の中に $\mathbf{T}$ が存在することがわかる．

写像 $\Pi_\Delta : \mathbf{S} \otimes T(M) \to \mathbf{S}$ は $Spin(n)$ 不変な写像であり，Π_Δ は零写像でないことは明らか．よって $\mathbf{S} \otimes T(M)$ を既約分解したときシューアの補題から $\mathbf{S}$ という成分が存在することがわかる．以上から $\mathbf{S}, \mathbf{T} \subset \mathbf{S} \otimes T(M)$ である．あとはワイルの次元公式（see [19]）から $\mathbf{T}$ の次元を計算すれば，$\mathbf{S} \otimes T(M) = \mathbf{T} \oplus \mathbf{S}$ となることがわかる． ■

このように束準同形 Π_Δ は $\mathbf{S}$ への射影であり，クリフォード積でかけることになる．また，補題から $\ker \Pi_\Delta$ が $\mathbf{T}$ である．

さて $\Pi_\Delta \circ \iota = id$ となる写像 ι は

$$\iota : \mathbf{S} \ni \phi \mapsto -\frac{1}{n} \sum_i e_i \cdot \phi \otimes e_i \in \mathbf{S} \otimes T(M)$$

となる．実際

$$\Pi_\Delta(-\frac{1}{n} \sum_i e_i \cdot \phi \otimes e_i) = -\frac{1}{n} \sum e_i e_i \phi = \phi.$$

そこで次の命題が成立する．

Proposition 4.7. $\ker \Pi_\Delta = \mathbf{T}$ への射影は

$$\Pi_T : \mathbf{S} \otimes T(M) \ni \phi \otimes v \mapsto \phi \otimes v + \frac{1}{n} \sum_i e_i \cdot v \cdot \phi \otimes e_i \in \ker \Pi_\Delta$$

となる．

ディラック作用素は $\Pi_\Delta \circ \nabla$ として定義した．同様に $\Pi_T \circ \nabla$ という一階微分作用素を考える．

Definition 4.2. 次の一階微分作用素を**ツイスター作用素**とよぶ

$$T := \Pi_T \circ \nabla : \Gamma(\mathbf{S}) \to \Gamma(\mathbf{T}).$$

より具体的に書けば

$$\begin{aligned} T(\phi) = \Pi_T(\sum \nabla_{e_i} \phi \otimes e_i) &= \sum \nabla_{e_i} \phi \otimes e_i + \frac{1}{n} \sum_i e_i \cdot D\phi \otimes e_i \\ &= \sum (\nabla_{e_i} \phi + \frac{1}{n} e_i D\phi) \otimes e_i. \end{aligned}$$

また，$\ker T$ **に入るスピノールをツイスタースピノール**と呼ぶ.

また，偶数次元なら $T = T^+ + T^-$（$T^\pm : \Gamma(\mathbf{S}^\pm) \to \Gamma(\mathbf{T}^\pm)$）と split し，

$$\ker T = \ker T^+ \oplus \ker T^-$$

が成立する.

Remark 4.9. ツイスター作用素と呼ばれる理由は，Atiyah-Hitchin-Singer の４次元幾何の論文において，４次元反自己双対多様体上のツイスター空間が可積分であることの証明に，暗にツイスター作用素を使ってるためである．四元数ケーラー幾何においても，ツイスター作用素やディラック作用素が現れるが，これは我々のものとは異なる.（４次元の場合のみ一致する）.

Lemma 4.8. ϕ がツイスタースピノールとは，次と同値

1.
$$\nabla_X \phi + \frac{1}{n} X \cdot D\phi = 0, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M) \quad \textbf{ツイスター方程式} \tag{4.1}$$

2.
$$X \cdot \nabla_Y \phi + Y \cdot \nabla_X \phi = \frac{2}{n} g(X, Y) D\phi, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M) \tag{4.2}$$

さらにツイスタースピノールは次をみたす

$$T(f\phi) = \sum (\frac{n-2}{n} g(\mathrm{grad} f, e_i)\phi - \frac{1}{n} \mathrm{grad} f \cdot e_i \cdot \phi) \otimes e_i + fT(\phi)$$

Proof. 最初の式 (4.1) は T の定義から明らかである．(4.1) を満たすスピノール ϕ があれば，

$$Y \nabla_X \phi + \frac{1}{n} YX \cdot D\phi = 0, \quad X \nabla_Y \phi + \frac{1}{n} XY \cdot D\phi = 0$$

であるので，この式を足せば (4.2) を得る．逆を証明する．(4.2) を満たすスピノール ϕ に対して，

$$e_i \nabla_{e_j} \phi + e_j \nabla_{e_i} \phi = \frac{2}{n} \delta_{ij} D\phi$$

であるので, e_i をかけて和をとれば

$$\begin{aligned} \frac{2}{n} e_j D\phi &= -n \nabla_{e_j} \phi + \sum_i e_i e_j \nabla_{e_i} \phi \\ &= -n \nabla_{e_j} \phi + \sum_i (-e_j e_i - 2\delta_{ij}) \nabla_{e_i} \phi \\ &= -(2+n) \nabla_{e_j} \phi - e_j D\phi \end{aligned}$$

となる．よって $\nabla_{e_i} \phi + \frac{1}{n} e_i D\phi = 0$ を得る.

次に $T(f\phi)$ を計算する．

$$\begin{aligned}
T(f\phi) &= \sum(\nabla_{e_i} f\phi + \frac{1}{n} e_i D f\phi) \otimes e_i \\
&= \sum((e_i f)\phi + \frac{1}{n} e_i \mathrm{grad} f\phi) \otimes e_i + fT(\phi) \\
&= \sum((e_i f)\phi + \frac{1}{n}(-\mathrm{grad} f e_i - 2g(\mathrm{grad} f, e_i))\phi) \otimes e_i + fT(\phi) \\
&= \sum(\frac{n-2}{n} g(\mathrm{grad} f, e_i)\phi - \frac{1}{n}\mathrm{grad} f \cdot e_i \cdot \phi) \otimes e_i + fT(\phi).
\end{aligned}$$

■

次に T の形式的随伴作用素を計算する．$\phi = \sum \phi_i \otimes e_i \in \mathbf{T}$ とは，$\sum e_i\phi_i = 0$ のこと．いつものように $(\nabla e_i)_x = 0$ となる点 x で考えて，

$$\begin{aligned}
\langle T\psi, \phi\rangle &= \langle \sum_j (\nabla_{e_j}\psi + \frac{1}{n} e_j D\psi) \otimes e_j, \sum \phi_i \otimes e_i\rangle \\
&= \sum_{i,j} \delta_{ij} \langle \nabla_{e_j}\psi + \frac{1}{n} e_j D\psi, \phi_i\rangle = \sum_i \langle \nabla_{e_i}\psi, \phi_i\rangle + \frac{1}{n}\sum_i \langle e_i D\psi, \phi_i\rangle \\
&= \sum_i e_i\langle\psi, \phi_i\rangle - \sum_i \langle\psi, \nabla_{e_i}\phi_i\rangle - \frac{1}{n}\sum_i \langle D\psi, e_i\phi_i\rangle \\
&= \sum_i e_i\langle\psi, \phi_i\rangle - \sum_i \langle\psi, \nabla_{e_i}\phi_i\rangle + 0.
\end{aligned}$$

ここで $V = \sum\langle\psi, \phi_i\rangle e_i$ とすれば $div(V) = \sum_i e_i\langle\psi, \phi_i\rangle$ となるので，積分することにより ϕ, ψ のどちらかがコンパクトサポートをもつとすれば，

$$(T\psi, \phi) = (\psi, -\sum_i \nabla_{e_i}\phi_i)$$

が成立する．これより **T の形式的随伴作用素 T^* は**

$$T^*(\sum \phi_i \otimes e_i) = -\sum \nabla_{e_i}\phi_i$$

となる．また

$$\begin{aligned}
T^*T(\phi) &= -\sum_i \nabla_{e_i}(\nabla_{e_i}\phi + \frac{1}{n} e_j D\phi) \\
&= \nabla^*\nabla\phi - \frac{1}{n}\sum_{ij} \nabla_{e_i}(e_i e_j \nabla_{e_j}\phi) \\
&= \nabla^*\nabla\phi - \frac{1}{n}\sum e_i e_j \nabla_{e_i}\nabla_{e_j}\phi \\
&= \nabla^*\nabla\phi - \frac{1}{n} D^2\phi
\end{aligned}$$

となる．つまり

Proposition 4.9. D をディラック作用素，T をツイスター作用素，T^* を T の形式的随伴作用素とする．このとき

$$\frac{1}{n}D^2 + T^*T = \nabla^*\nabla$$

が成立する．また,

$$\{\text{平行スピノールの空間}\} = \ker\nabla = \ker D \cap \ker T$$

となる．

Remark 4.10. 上の命題は ∇ を分解したものが D と T であるので，ある意味で明らかである．D^2 に $1/n$ という項があるのは，Π_Δ が正確に言えば直交射影の $1/\sqrt{n}$ 倍になっているからである．

Proof. 最初の主張は問題ない．また M がコンパクトなら，最初の主張から二番目の主張がわかる．しかし，M がコンパクトでなくてもよい．$\phi \in \ker D \cap \ker T$ とする．$\phi \in \ker T$ なら，$\nabla_X\phi + \frac{1}{n}XD\phi = 0$ である．さらに $\phi \in \ker D$ であるので，$\nabla_X\phi = 0$ を得る． ■

さて，ディラック作用素とツイスター作用素が共形共変一階微分作用素であることを証明しよう．(M,g) をスピン多様体として，g の共形変形した計量を $g' = e^{2\sigma}g$ とする．(M,g) と (M,g') のフレーム束の間の同型は,

$$\Psi : \mathbf{SO}(M) \ni p = \{e_i\}_i \mapsto p' = \{e'_i = e^{-\sigma}e_i\}_i \in \mathbf{SO}'(M)$$

となるのであった．スピン構造として同じものをとれば，上の同型は主スピン束の間の同型へ自然にリフトする．

$$\Psi : \mathbf{Spin}(M) \ni p \mapsto p' \in \mathbf{Spin}'(M)$$

そこで, 同伴束の間の isometory を得る．

$$\Psi : \mathbf{S}_\rho := \mathbf{Spin}(M) \times_\rho V_\rho \ni [p,v] \mapsto [p',v] \in \mathbf{Spin}'(M) \times_\rho V_\rho =: \mathbf{S}'_\rho$$

この同伴束のレビチビタ接続からの共変微分の変化を見てみ．$\mathbf{SO}(M)$ の局所正規直交フレームを $\{e_i\}$ としたとき，接続 1 形式（$\mathfrak{so}(n)$-valued 1-form）は $\omega_{ji}(V) = g(\nabla_V e_i, e_j)$ となる．そこで

$$\nabla'_X Y = \nabla_X Y + (X\cdot\sigma)Y + (Y\cdot\sigma)X - g(X,Y)\mathrm{grad}(\sigma)$$

を用いれば

$$\begin{aligned} g'(\nabla'_V e'_i, e'_j) &= g'(\nabla_V e'_i + (V\sigma)e'_i + (e'_i\sigma)V - (V,e_i)\mathrm{grad}\sigma, e'_j) \\ &= g'(-(V\sigma)e'_i + e^{-\sigma}\nabla_V e_i + (V\sigma)e'_i + (e'_i\sigma)V - (V,e_i)\mathrm{grad}\sigma, e'_j) \\ &= g(\nabla_V e_i, e_j) + (e_i\sigma)g(V,e_j) - (e_j\sigma)g(V,e_i) \end{aligned}$$

スピノール束 $\mathbf{S}$ と $\mathbf{S}'$ の共変微分の関係は

$$\begin{aligned}
\nabla'_V\Psi(\phi) &= \frac{1}{8}\sum_{ij} g'(\nabla'_V e'_i, e'_j)[e'_i, e'_j]\Psi(\phi)\\
&= \frac{1}{8}\Psi(\sum_{ij} g'(\nabla'_V e'_i, e'_j)[e_i, e_j]\phi)\\
&= \frac{1}{8}\Psi\{\sum(g(\nabla e_i, e_j) + (e_i\sigma)(V, e_j) - (e_j\sigma)(V, e_i))[e_i, e_j]\phi\}\\
&= \Psi\{\nabla_V\phi + \frac{1}{4}(\mathrm{grad}\sigma \cdot V \cdot -V \cdot \mathrm{grad}\sigma\cdot)\phi\}
\end{aligned}$$

以上から

Lemma 4.10. **$\mathbf{S}$ と $\mathbf{S}'$ 上の共変微分 ∇ と ∇' の関係式は,**

$$\nabla'_V = \Psi \circ \{\nabla_V + \frac{1}{4}(\mathrm{grad}\sigma \cdot V \cdot -V \cdot \mathrm{grad}\sigma\cdot)\} \circ \Psi^{-1}$$

さらに，次が成立する．

Lemma 4.11.

$$\frac{1}{4}\sum_i e_i(ve_i - e_iv) = \frac{n-1}{2}v$$

この定数 $-\frac{n-1}{2}$ をディラック作用素に対する**共形重み（*conformal weight*）**と呼ぶ．

Proof. $v = e_j$ として証明すればよい．

$$\frac{1}{4}\sum_i e_i(e_je_i - e_ie_j) = \frac{1}{4}\sum_i e_i(-e_ie_j - e_ie_j - 2\delta_{ij}) = \frac{1}{4}(\sum_i 2e_j) - \frac{1}{2}e_j = \frac{n-1}{2}e_j$$

となる． ■

上の二つの Lemma により次を得る．

Corollary 4.12.

$$D' = e^{-\sigma}\Psi\{D + \frac{n-1}{2}\mathrm{grad}\sigma\}\Psi^{-1}$$

Proof. これは注意が必要である．ディラック作用素の定義は $D = \sum e_i\nabla_{e_i}$ としたが，ここでは $D = \Pi_\Delta \circ \nabla$ を採用する．($T(M) \simeq T^*(M)$ の同一視は計量によって異なるため)．

まず

$$\begin{aligned}
\nabla'\Psi(\phi) = \nabla'_{e'_i}\Psi(\phi) \otimes e'_i &= e^{-\sigma}\Psi(\nabla_{e_i}\phi + \frac{1}{4}(\mathrm{grad}\sigma e_i - e_i\mathrm{grad}\sigma)\phi) \otimes e'_i\\
&= e^{-\sigma}\Psi(\nabla_{e_i}\phi \otimes e_i + \frac{1}{4}(\mathrm{grad}\sigma e_i - e_i\mathrm{grad}\sigma)\phi \otimes e_i)
\end{aligned}$$

となる．この両辺においてスピノール束への射影をとれば

$$
\begin{aligned}
D'\Psi(\phi) &= e^{-\sigma}\Psi \circ \{\sum e_i \nabla_{e_i}\phi + \frac{1}{4}\sum e_i(\mathrm{grad}\sigma e_i - e_i \mathrm{grad}\sigma)\phi\} \\
&= e^{-\sigma}\Psi\{D\phi + \frac{n-1}{2}\mathrm{grad}\sigma \cdot \phi\}
\end{aligned}
$$

■

ディラック作用素 D は $D(f\phi) = (\mathrm{grad}(f)) \cdot \phi + fD\phi$ を満たすことは証明したので，

$$
\begin{aligned}
D' e^{-\frac{n-1}{2}\sigma}\Psi(\phi) &= e^{-\sigma}\Psi\{(D + \frac{n-1}{2}\mathrm{grad}\sigma) e^{-\frac{n-1}{2}\sigma}\phi\} \\
&= e^{-\sigma}\Psi\{e^{-\frac{n-1}{2}\sigma}D\phi - \frac{n-1}{2}e^{-\frac{n-1}{2}\sigma}\mathrm{grad}\sigma\phi + e^{-\frac{n-1}{2}\sigma}\frac{n-1}{2}\mathrm{grad}\sigma\phi\} \\
&= \Psi(e^{-(\frac{n-1}{2}+1)\sigma}D\phi)
\end{aligned}
$$

となる．以上から

Proposition 4.13. **ディラック作用素は共形共変一階微分作用素**であり，

$$
D' = (e^{(-\frac{n-1}{2}-1)\sigma}\Psi) \circ D \circ (e^{-\frac{n-1}{2}\sigma}\Psi)^{-1}.
$$

特に多様体がコンパクトなら $\dim\ker D' = \dim\ker D$ が成立する．つまり $\dim\ker D$ は共形不変量である．

Remark 4.11. 上と同様の方法で外微分 d や余微分 d^* の共形共変性を証明することができる．しかし外微分や余微分の場合には，ベクトル束 $\Lambda^k(M)$ の conformal weight も考慮する必要がある（練習問題）．

次にツイスター作用素が共形共変一階微分作用素であることを証明する．まず，ディラック作用素の共形共変性を使って

$$
\begin{aligned}
T'\Psi(\phi) &= \sum \nabla'_{e'_i}\Psi(\phi) + \frac{1}{n}e'_i D'\Psi(\phi) \otimes e'_i \\
&= \sum e^{-\sigma}\{\Psi(\nabla_{e_i}\phi + \frac{1}{4}(\mathrm{grad}\sigma e_i - e_i\mathrm{grad}\sigma)\phi + e_i\frac{1}{n}D\phi + \frac{n-1}{2n}e_i\mathrm{grad}\sigma\phi)\} \otimes e'_i \\
&= e^{-\sigma}\Psi(T\phi) + \sum e^{-\sigma}\Psi\{\frac{1}{4}\mathrm{grad}\sigma e_i\phi + \frac{n-2}{4n}e_i\mathrm{grad}\sigma\phi\} \otimes e'_i
\end{aligned}
$$

を得る．そこで

$$
\begin{aligned}
T'(\Psi(e^{\sigma/2}\phi)) =& e^{-\sigma}\Psi(T(e^{\sigma/2}\phi)) + \sum e^{-\sigma/2}\{\frac{1}{4}\mathrm{grad}\sigma e_i\phi + \frac{n-2}{4n}e_i\mathrm{grad}\sigma\phi\} \otimes e_i' \\
=& e^{-\sigma/2}\Psi(T\phi) + e^{-\sigma/2}\Psi\{\sum(\frac{n-2}{2n}g(\mathrm{grad}\sigma, e_i)\phi - \frac{1}{2n}\mathrm{grad}\sigma\cdot e_i\cdot\phi)\} \otimes e_i' \\
&+ \sum e^{-\sigma/2}\Psi\{\frac{1}{4}\mathrm{grad}\sigma e_i\phi + \frac{n-2}{4n}e_i\mathrm{grad}\sigma\phi\} \otimes e_i' \\
=& e^{-\sigma/2}\Psi(T\phi) + e^{-\sigma/2}\Psi\{\sum(\frac{n-2}{2n}g(\mathrm{grad}\sigma, e_i)\phi\} \otimes e_i' \\
&+ \sum e^{-\sigma/2}\Psi\{\frac{n-2}{4n}\mathrm{grad}\sigma e_i\phi + \frac{n-2}{4n}e_i\mathrm{grad}\sigma\phi\} \otimes e_i' \\
=& e^{-\sigma/2}\Psi(T\phi)
\end{aligned}
$$

となる．

Proposition 4.14. **ツイスター作用素は共形共変一階微分作用素**である．

$$T' = (e^{(1/2-1)\sigma}\Psi) \circ T \circ (e^{\sigma/2}\Psi)^{-1}$$

ここで $e^{\sigma/2}$ における $1/2$ をツイスター作用素の ***conformal weight*** と呼ぶ．特に $\ker T = \ker T'$ が成立する．

Remark 4.12. T^*T が楕円型作用素であるので，コンパクト多様体上では $\ker T$ は有限次元である．実は，**非コンパクトであっても** $\ker T$ **は有限次元である**ことがわかる．定理 5.14 で証明する．

Remark 4.13. T^* も共形共変一階微分作用素になる．しかし，T の随伴作用素として定義しているので体積要素の変化も考慮しなければならないことに注意する．より一般に同伴束上で，レビチビタ接続またはスピン接続から定義される**共変微分を既約分解した微分作用素は共形共変一階微分作用素**である．この事実は Fegan によるもの．詳しくは本間泰史「Bochner-Weitzenböck formula and curvature actions on Riemannian manifolds」 Trans. AMS 2005 を見よ．また，D^2 や T^*T は共形共変ではないことに注意する．

4.4 Lichnerowicz 公式と Friedrich 固有値評価

ディラック作用素とツイスター作用素の一つの関係は

$$\frac{1}{n}D^2 + T^*T = \nabla^*\nabla$$

である．実は上の式で conformal weight をかけて和をとれば，作用素の order が落ち曲率でかけることがわかる．つまり

$$\mathbf{\frac{1}{2}}T^*T + \frac{\mathbf{-(n-1)}}{\mathbf{2}}\frac{1}{n}D^2 = -\kappa/8$$

が成立する．ここで κ はスカラー曲率（太い文字が conformal weight である）．以下ではこの事実を証明する．

Proposition 4.15 (Lichnerowicz 公式)**.** D をスピノール束上のディラック作用素．$\nabla^*\nabla$ を接続ラプラシアンとすれば

$$D^2 = \nabla^*\nabla + \kappa/4$$

が成立する．これを ***Lichnerowicz* 公式**とよぶ．

これを証明するためにまず次の補題から証明する．

Lemma 4.16. X をベクトル場としたとき，スピノール束上で次が成立

$$\sum e_j \cdot R_\Delta(X, e_j) = -\frac{1}{2}Ric(X)\cdot \tag{4.3}$$

ここで $Ricci$ 変換は $Ric(X) = \sum R_{jiil}X^j e_l$ で定義していた．

Proof. まずビアンキ恒等式

$$R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} = 0 = R_{ijkl} + R_{iljk} + R_{iklj}$$

が成立した．$X = \sum X^i e_i$ として，

$$\begin{aligned}
&3\sum R_{ijkl}X^i e_j e_k e_l \\
=&\sum R_{ijkl}X^i e_j e_k e_l + R_{iljk}X^i e_l e_j e_k + R_{iklj}X^i e_k e_l e_j \\
=&\sum R_{ijkl}X^i e_j e_k e_l + R_{iljk}X^i(-2\delta_{lj}e_k + 2\delta_{lk}e_j + e_j e_k e_l) + R_{iklj}X^i(-2\delta_{lj}e_k + 2\delta_{kj}e_l + e_j e_k e_l) \\
=&2\sum(-R_{illk}X^i e_k + R_{iljl}X^i e_j - R_{ikjj}X^i e_k + R_{iklk}X^i e_l) \\
=&6\sum R_{lilk}X^i e_k = -6Ric(X)\cdot
\end{aligned}$$

となる．そこで

$$\sum e_i R(X, e_i) = \frac{1}{4}\sum_{ijk}(R(X, e_k)e_i, e_j)e_k e_i e_j = \frac{1}{4}\sum R_{ijkl}X^i e_j e_k e_l = -\frac{1}{2}Ric(X)$$

が成立する． ■

さて命題を証明しよう

Proof. クリフォード関係式から

$$(e_i e_j + \delta_{ij}) = -(e_j e_i + \delta_{ji})$$

を得る（主表象の反対称性）．一方曲率の定義から

$$(\nabla^2_{e_i,e_j} - R_\Delta(e_i,e_j)/2) = (\nabla^2_{e_j,e_i} - R_\Delta(e_j,e_i)/2)$$

となる（共変微分の対称性）．そこで

$$\sum(e_ie_j + \delta_{ij})(\nabla^2_{e_i,e_j} - R_\Delta(e_i,e_j)/2) = -\sum(e_je_i + \delta_{ji})(\nabla^2_{e_j,e_i} - R_\Delta(e_j,e_i)/2)$$

となるので，

$$-\nabla^*\nabla + D^2 - \sum e_ie_jR_\Delta(e_i,e_j)/2 = -(-\nabla^*\nabla + D^2 - \sum e_ie_jR_\Delta(e_i,e_j)/2)$$

となり，

$$D^2 = \nabla^*\nabla + \sum e_ie_jR_\Delta(e_i,e_j)/2$$

が成立する．そこで $\sum e_ie_jR_\Delta(e_i,e_j) = \kappa/2$ を示せばよい．

$$\begin{aligned}\sum e_ie_jR_\Delta(e_i,e_j) &= -\frac{1}{2}\sum e_iRic(e_i) = -\frac{1}{2}\sum R_{il}e_ie_l \\ = -\frac{1}{4}\sum(R_{il}e_ie_l + R_{li}e_le_i) &= -\frac{1}{4}\sum R_{il}(e_ie_l + e_le_i) = \frac{1}{2}\sum R_{il}\delta_{il} = \frac{1}{2}\kappa\end{aligned}$$

■

Lichnerowicz 公式の応用は次の**消滅定理**である．

Theorem 4.17. M をコンパクトスピン多様体でスカラー曲率が正とする（または，すべての点で $\kappa \geq 0$ で，ある点で $\kappa > 0$）．このとき $\ker D = 0$.

Proof. $\phi \in \ker D$ とする．このとき

$$\frac{1}{4}\int_M \kappa\langle\phi,\phi\rangle vol = -\int_M \langle\nabla^*\nabla\phi,\phi\rangle vol = -\|\nabla\phi\|^2$$

となる．$\kappa \geq 0$ であるので，$\nabla\phi = 0$ を得る．特に $\langle\phi,\phi\rangle$ は定数である．よって，ある点で $\kappa > 0$ あるので，$\int_M \kappa\langle\phi,\phi\rangle vol = 0$ となるのは $\phi = 0$ である． ■

次も同様に証明できる．

Corollary 4.18. コンパクトスピン多様体で $\kappa \equiv 0$ とする．このとき調和スピノールの空間と平行スピノールの空間は一致する．

さらに指数定理を使えば次がわかる．

Corollary 4.19. M **をコンパクト** $4k$ **次元スピン多様体とする．さらに正のスカラー曲率をもつ計量が入るとする．このとき** $\hat{A}(M) = 0$ **である．**

この対偶が重要，M **をコンパクト** $4k$ **次元スピン多様体として，** $\hat{A}(M) \neq 0$ **なら，正のスカラー曲率をもつ計量は入らない**.

Lichnerowicz 公式を使うと固有値の評価も可能である．M をコンパクトスピン多様体とする．このときディラック作用素の固有スピノール ϕ で $\|\phi\|^2 = 1$ となるものを考える．

$$\lambda^2 \phi = D^2 \phi = \nabla^* \nabla \phi + \frac{\kappa}{4} \phi$$

となるので

$$\lambda^2 = \|\nabla \phi\|^2 + \frac{1}{4} \int_M \langle \kappa(x) \phi, \phi \rangle \geq \frac{1}{4} \min_{x \in M} \kappa(x)$$

となる．しかし，もっと良い評価を得ることが可能である．そのためにはツイスター作用素が必要である．まず

$$\frac{1}{n} D^2 + T^* T = \nabla^* \nabla$$

が成立した．この公式と Lichnerowicz 公式をあわせれば,

$$\frac{1}{2} T^* T + \frac{-(n-1)}{2} \frac{1}{n} D^2 = -\kappa/8$$

が成立する．このように**作用素の適当な線形結合が曲率作用素になる**こと，つまり,

$$\sum a_i D_i^* D_i = \text{curvature action}$$

という形の式を**最適ボホナーワイゼンベック公式**とよぶ．そこで

$$D^2 = \frac{n}{n-1} T^* T + \frac{n}{4(n-1)} \kappa$$

となる．先ほどと同様にして次がわかる．

Theorem 4.20 (Friedrich 固有値評価). M をコンパクトスピン多様体でスカラー曲率が正とする．このときディラック作用素の固有値 λ は

$$\lambda^2 \geq \frac{n}{4(n-1)} \min_{x \in M} \kappa(x)$$

となる．さらに等号が成立するスピノール ϕ は $\phi \in \ker T$ となる．

球面上で考えると，等号が成立するスピノールが存在することがわかる（後述）．つまり**この評価は sharp** である．（sharp とは，これ以上の評価は無理ということ．もちろん，適当な仮定のもとでは，よりよい評価ができる）

また，**等号が成立するスピノールは，キリングスピノール**である．それについては次の Section で述べる．

4.5 Hijazi 固有値評価

スピン多様体上のディラック作用素の 2 乗に対する Friedrich 固有値評価を述べた．次に，ディラック作用素の共形共変性に注目することにより，Hijazi 固有値評価を与えよう．

M をコンパクト n 次元スピン多様体とし，ψ を固有値 λ の固有スピノールとする（$D\psi = \lambda\psi$）．

計量 g を $g' \to e^{2\sigma}g$ と共形変形したとき，$\psi' = e^{-\frac{n-1}{2}\sigma}\psi$ とすれば,

$$D'\psi' = (e^{(-\frac{n-1}{2}-1)\sigma} \circ D \circ e^{\frac{n-1}{2}\sigma})\psi' = e^{(-\frac{n-1}{2}-1)\sigma}D\psi = \lambda e^{-\sigma}\psi'$$

となる．そして，最適ボホナーワイゼンベック公式から,

$$0 \le \|T'\psi'\|^2 = \int_M |T'\psi'| vol_{g'} = \int_M (\frac{n-1}{n}|D'\psi'|^2 - \frac{1}{4}\kappa'|\psi'|^2) vol_{g'}$$

となるので,

$$\begin{aligned} 0 \le \frac{n-1}{n}\int_M (\lambda^2 - \frac{1}{4}\frac{n}{n-1}\kappa' e^{2\sigma})|\psi'|^2 e^{-2\sigma} vol_{g'} \\ \le \frac{n-1}{n}(\lambda^2 - \frac{1}{4}\frac{n}{n-1}\inf_M \kappa' e^{2\sigma})\int_M |\psi'|^2 e^{-2\sigma} vol_{g'} \end{aligned}$$

となる．これは，どんな共形変形に対しても成立するので，次を得る．

Theorem 4.21 (Hijazi 固有値評価). (M, g) をコンパクトスピン多様体とする．ディラック作用素の固有値 λ は次を満たす．

$$\lambda^2 \ge \frac{n}{4(n-1)} \sup_{\sigma\in C^\infty(M)} \inf_M (\kappa' e^{2\sigma})$$

ここで，κ' は $g' = e^{2\sigma}g$ に対するスカラー曲率である．

この定理の書き換えてみる．

まず，スカラー曲率の変化は

$$e^{2\sigma}\kappa' = \kappa + 2(n-1)\Delta\sigma - (n-1)(n-2)|\mathrm{grad}\sigma|^2$$

であった．山辺問題のときと同様に，$n \ge 3$ の場合に，$e^{2\sigma} = \phi^{\frac{4}{n-2}}$ とすれば,

$$4\frac{n-1}{n-2}L\phi = \kappa'\phi^{\frac{n+2}{n-2}}, \quad L = \Delta + \frac{n-2}{4(n-1)}\kappa$$

であったので,

$$4\frac{n-1}{n-2}\phi^{-1}L\phi = \kappa'\phi^{\frac{4}{n-2}} = \kappa' e^{2\sigma}$$

となる．よって Hijazi 固有値評価は

$$\lambda^2 \geq \frac{n}{n-2}\sup_{\phi>0}\inf_M(\phi^{-1}L\phi) = \frac{n}{4(n-1)}\sup_{\phi>0}\inf_M(4\frac{n-1}{n-2}\phi^{-1}\Delta\phi + \kappa)$$

と書き換えられる（$n \geq 3$）．例えば，ϕ を定数とすれば，

$$\lambda^2 \geq \frac{n}{4(n-1)}\inf_M \kappa(x)$$

となるので，Friedrich 固有値評価を得る．よって，**Hijazi 固有値評価は Friedrich 固有値評価より良い評価になっている**ことがわかる．

さて，L の固有関数 ϕ（固有値 μ）を考えると，$\lambda^2 \geq \frac{n}{n-2}\mu$ を得る．もともと $\lambda^2 \geq 0$ であるので，μ が負であったら意味がない．そこで，L が非負の作用素の場合を考える（固有値がすべて零より大きい．例えばスカラー曲率が正の場合）．L の第一固有値を μ_1 として，固有関数を ϕ_1 とする．このとき ϕ_1 は各点で正であるように選ぶことができる．また固有値の重複度は 1 である．

Proof. （細かいことは Gilbarg-Trudinger の「Elliptic Partial Differential equations of Second order をみよ）作用素 L に対して，レイリー商を考える．

$$R(u) = \frac{\int(|\nabla u|^2 + \kappa u^2)dx}{\|u\|^2_{L^2}}$$

を考える．この inf は第一固有値に一致し，inf を与えるものが第一固有空間である（よって inf = min である）．証明はラプラシアンのときと同様である．さて，u を第一固有関数とする（$R(u) = \mu_1$）．このとき $|u| \in W^{1,2}(M)$（ソボレフノルム）であり，

$$\nabla u = \begin{cases} \nabla u & u > 0 \\ 0 & u = 0 \\ -\nabla u & u < 0 \end{cases}$$

となることがわかる．よって $\mu_1 = R(|u|) = R(u)$ が成立するので，$|u|$ も第一固有値に対する固有関数である．そして，$|u| \geq 0$ であるので，楕円型微分作用素 $L - \mu_1$ に対する Harnack 不等式から，$|u| > 0$ が従う．よって，u は定符号である．また，u_1, u_2 を固有値 μ_1 の固有関数とすれば，これらは L^2 直交するが，これは u_1, u_2 が定符号であることに矛盾する．よって重複度 1 である．

Hranack 不等式：Ω を連結開集合として，二階楕円型微分作用素 L に対して，Ω 上で $Lu = 0$ かつ $u \geq 0$ となる関数 $u \in W^{1,2}(\Omega)$ を考える．このとき

$$\sup_{\Omega'} u \leq C \inf_{\Omega'} u$$

が成立する．ここで Ω' は閉包がコンパクトで Ω に含まれる開集合． ■

このとき，

$$\lambda^2 \geq \frac{n}{n-2}\mu_1$$

を得る．さらに，

$$\mu_1 = \frac{n}{n-2}\sup_{\phi>0}\inf_M(\phi^{-1}L\phi)$$

となる．

Proof. ϕ_1 を山辺作用素の第一固有関数としておく．このとき $\phi > 0$ なる関数に対して，

$$\inf_M(\phi^{-1}L\phi - \phi_1^{-1}L\phi_1) = \inf_M(\phi^{-1}\Delta\phi - \phi_1^{-1}\Delta\phi_1)$$

が非正であることがわかればよい．そこで，$\phi_1 > 0$ であることから．

$$\int_M (\phi^{-1}\Delta\phi - \phi_1^{-1}\Delta\phi_1)\phi_1^2 vol_g$$

が非正であることを証明すればよい．

$$\begin{aligned}
&\int_M (\phi^{-1}\Delta\phi - \phi_1^{-1}\Delta\phi_1)\phi_1^2 vol_g \\
=&\int_M (\langle\phi^{-1}\phi_1^2, \Delta\phi\rangle - \langle\phi_1, \Delta\phi_1\rangle) vol_g \\
=&\int_M (\langle\nabla\phi^{-1}\phi_1^2, \nabla\phi\rangle - \langle\nabla\phi_1, \nabla\phi_1\rangle) vol_g \\
=&-\int_M \phi^2|\nabla(\phi_1\phi^{-1})|^2 vol_g \leq 0
\end{aligned}$$

となる． ■

Corollary 4.22 (Hijazi)**.** M をコンパクトスピン多様体で次元を 3 以上とする．このときディラック作用素の固有値 λ は次を満たす．

$$\lambda^2 \geq \frac{n}{n-2}\mu_1$$

ここで，μ_1 は山辺作用素に対する第一固有値である．また，上の不等式で等号 $\lambda_1^2 = \frac{n}{n-2}\mu_1$ となる，ディラック作用素の第一固有値 λ_1 が存在したとする．このとき，次が成立する．

1. $\mu_1 = 0$ の場合には，ϕ' は (M, g') 上の平行スピノールであり，(M, g') はリッチ平坦になる．

2. $\mu_1 > 0$ の場合には，ϕ がキリングスピノールであり，(M, g) がアインシュタイン多様体になる．

Proof. 等号成立の場合にどうなるかは，次の Section で証明する． ■

Remark 4.14. $\mu_1 \geq 0$ と非負のスカラー曲率をもつ計量に共形変形できることは同値である.（by Kazdan-Warner,「prescribing curvatures」, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, 27 (1975)）

$n = 2$ の場合は次のようになる.

Corollary 4.23 (Bär). 2 次元コンパクトスピン多様体上でディラック作用素の固有値 λ は, 次を満たす.

$$\lambda^2 \geq \frac{2\pi\chi(M)}{Area(M,g)}.$$

ここで, $\chi(M) = 2 - 2genus(M)$ は M のオイラー数である. よって, この式で意味があるのは, オイラー数が *2* である球面のときである. そこで,

球面 (S^2, g)（計量は任意）上のディラック作用素の固有値は

$$\lambda^2 \geq \frac{4\pi}{Area(S^2,g)}$$

を満たす. 等号成立する固有スピノールが存在すれば, 標準球面となる.

Proof. リーマン面上でガウス曲率を K とすると, $K = 2\kappa$ である. また

$$\int_M K = 2\pi\chi(M), \quad \text{ガウスボンネの定理}$$

が成立する.

さて, 楕円型線形微分方程式（σ が未知関数. K が given）

$$\Delta\sigma = -K + \frac{2\pi\chi(M)}{Area(M,g)} \tag{4.4}$$

を考える. ラプラシアン Δ に対するグリーン作用素を G とすれば, $\mathrm{id} = pr_H + \Delta G$ が成立する. ここで pr_H は調和部分への射影である. つまり, 調和部分を除けば, Δ^{-1} が存在することを意味している. 今の場合には, 調和部分（$\ker\Delta$）は定数であるので,

$$\int_M \langle \frac{2\pi\chi(M)}{Area(M,g)}, 1\rangle - \int_M \langle K, 1\rangle = 2\pi\chi(M) - 2\pi\chi(M) = 0$$

から, (4.4) の左辺の調和部分が存在しない. よって,（滑らかな）解 σ_0 をもつ. また. $n = 2$ の場合のスカラー曲率の変化は

$$e^{2\sigma}\kappa' = \kappa + 2\Delta\sigma$$

であったので,

$$e^{2\sigma_0}K_0 = K + \Delta\sigma_0 = \frac{2\pi\chi(M)}{Area(M,g)}$$

となる．よって，定理 4.21 より，

$$\lambda_1^2 = \frac{1}{2}\sup_{\sigma}\inf_{M}(\kappa' e^{2\sigma}) \geq \frac{2\pi\chi(M)}{Area(M,g)}$$

を得る．

また，等号成立は M がキリングスピノールを持つ場合であるが，二次元スピン多様体がキリングスピノールをもつ場合は，定曲率空間である（後述）．よって，(S^2, g) 上で等号成立するなら，g は標準球面となる． ■

4.6 幾何学で現れるディラック作用素

今までの議論は，スピノール束上のディラック作用素に関することであった．ここでは，より一般的なディラック作用素について考える．

(M,g) をリーマン多様体またはスピン多様体として，$\mathbb{C}l(M)$ をクリフォード束とする．M 上のベクトル束 $\mathbf{V}$ が次を満たすとき**ディラック束**とよぶ．

- $\mathbb{C}l(M)$ がファイバーごとに作用している．
- $\mathbf{V}$ の内積が次をみたす．

$$\langle v\phi, \psi\rangle + \langle \phi, v\psi\rangle = 0, \tag{4.5}$$

- $\mathbf{V}$ 上の共変微分が内積を保存．
- 共変微分がクリフォード積と可換：

$$\nabla_X(\phi\cdot\psi) = (\nabla_X\phi)\cdot\psi + \phi\cdot\nabla_X\psi, \quad \phi\in\Gamma(\mathbb{C}l(M)), \psi\in\Gamma(\mathbf{V}) \tag{4.6}$$

このとき

$$D = \sum e_i\nabla_{e_i} : \Gamma(\mathbf{V}) \to \Gamma(\mathbf{V})$$

を $\mathbf{V}$ 上の**ディラック作用素**とよぶ．

Example 4.7. $\Lambda^*(M)$ に $\mathbb{C}l(M)$ が左から作用していた場合を考える．つまり

$$v\cdot = v\wedge - \iota(v)$$

である．この作用により $\Lambda^*(M)$ はディラック束となる．

次の命題は，簡単にわかる．

Proposition 4.24. *Proposition 4.1* の性質はディラック束上のディラック作用素に対して成立する．

4.6.1 twisted Dirac 作用素

(M,g) をスピン多様体とする．$\mathbf{S}$ をスピノール束として，$\mathbf{E}$ をエルミート内積および内積が平行となる共変微分が入ったベクトル束とする．

このとき $\mathbf{S}\otimes\mathbf{E}$ を考える．内積はテンソル積内積，共変微分もテンソル積で入れる．また $\mathbf{S}$ にはクリフォード積があるが，$\mathbf{S}\otimes\mathbf{E}$ へのクリフォード積を $\mathbf{S}$ の部分のみへ作用させることにより定義する．つまり

$$v\cdot(\phi\otimes e)=(v\cdot\phi)\otimes e$$

このとき，$\mathbf{S}\otimes\mathbf{E}$ はディラック束になることがわかる．そしてディラック作用素を

$$D_E:=\sum e_i\nabla_{e_i}$$

として定義して，これを twisted **ディラック作用素**とよぶ（または coupled ディラック作用素）

まず，ボホナーワイゼンベック公式について考える．共変微分はテンソル積で定義したので，

$$\begin{aligned}\nabla^2_{X,Y}(\phi\otimes e)&=(\nabla_X\nabla_Y-\nabla_{\nabla_XY})(\phi\otimes e)\\&=(\nabla_X\nabla_Y\phi)\otimes e+(\nabla_Y\phi)\otimes(\nabla_Xe)+(\nabla_X\phi)\otimes(\nabla_Ye)+\phi\otimes(\nabla_X\nabla_Ye)\\&\quad-(\nabla_{\nabla_XY}\phi)\otimes e-\phi\otimes(\nabla_{\nabla_XY}e)\\&=(\nabla^2_{X,Y}\phi)\otimes e+\phi\otimes\nabla^2_{X,Y}e+(\nabla_Y\phi)\otimes(\nabla_Xe)+(\nabla_X\phi)\otimes(\nabla_Ye)\end{aligned}$$

となることから，曲率は

$$(\nabla^2_{X,Y}-\nabla^2_{Y,X})(\phi\otimes e)=(R_\Delta(X,Y)\phi)\otimes e+\phi\otimes(R_E(X,Y)e)$$

Lichnerowicz 公式の証明と同様にして

$$D_E^2=\nabla^*\nabla+\frac{1}{2}\sum e_ie_j\{R_\Delta(e_i,e_j)\otimes\mathrm{id}+\mathrm{id}\otimes R_E(e_i,e_j)\}$$

となる．クリフォード積は $\mathbf{S}$ にのみ作用することを考えれば，

Proposition 4.25. *twisted* ディラック作用素 D_E^2 は次をみたす．

$$D_E^2=\nabla^*\nabla+\frac{1}{4}\kappa+\frac{1}{2}\sum_{i,j}e_ie_j\otimes R_E(e_i,e_j)$$

Remark 4.15. ディラック作用素に対する消滅定理と同様のことをするならば，R_E になにかしら条件が必要になってくる．

クリフォード代数の表現は完全可約であり，既約なものはスピノール表現のみであった．そこでディラック束をクリフォード代数により既約分解すれば，かならず $\mathbf{S}\otimes\mathbf{E}$ の形になる．ディラック束はリーマン多様体上でも定義できるが，スピノール束はリーマン多様体上では定義できなかった．しかし，リーマン多様体上でディラック束を局所的に $\mathbf{S}\otimes\mathbf{E}$ と分解するは可能である．そして，局所的な話はすべてリーマン多様体上のディラック束についても成立することになる．例えば，上のボホナーワイゼンベック公式や（局所）指数定理は局所的な話なのでリーマン多様体上のディラック束でも通用する（詳しくは [21] をみよ）．そこで，twisted ディラック作用素に対する指数定理を述べる．他のディラック束に対する指数定理（リーマン多様体上でも）は，すべて次の命題の系として書ける．

Proposition 4.26. (M,g) を偶数次元コンパクトスピン多様体とする．このときディラック作用素 $D_E^\pm:\Gamma(\mathbf{S}^\pm\otimes\mathbf{E})\to\Gamma(\mathbf{S}^\mp\otimes\mathbf{E})$ を考える．

$$\mathrm{ind}(D_E):=\dim\ker D_E^+-\dim\ker D_E^-$$

とすれば

$$\mathrm{ind}(D_E)=\int_M\hat{\mathbf{A}}(TM)ch(\mathbf{E})$$

が成立する．ここで $ch(\mathbf{E})$ はチャーン指標.

証明は [21] を見よ．ここではチャーン指標の説明のみする．$\mathbf{E}$ を複素ベクトル束とする．特性類を考えるには，分解原理により $\mathbf{E}=l_1\oplus\cdots\oplus l_r$ と複素直線束の和に分解して考えればよい．そこで

$$c(\mathbf{E})=1+c_1+c_2+\cdots+c_r=\prod_{i=1}^r(1+x_i),\quad x_i=c_1(l_1)$$

を全チャーン類とよぶ．各チャーン類 $c_r(\mathbf{E})$ は x_i の基本対称式である．また

$$ch(\mathbf{E})=e^{x_1}+\cdots+e^{x_n}=r+\sum x_j+\frac{1}{2}\sum x_j^2+\cdots+$$

を**チャーン指標**とよぶ．各項 $ch_k(\mathbf{E})=\frac{1}{k!}\sum x_i^k$ は x_i に対する対称式であるのでチャーン類 c_i の多項式としてかけることに注意する．実際，r 変数の基本対称式 $e_k(x)=e_k(x_1,\cdots,x_r)$ と冪和対称式 $p_k(x)=x_1^k+\cdots+x_r^k$ の間には

$$\sum_{j=0}^k(-1)^jp_{k-j}e_j=(-1)^k(r-k)e_k,\quad 1\le k\le r$$
$$\sum_{j=0}^d(-1)^jp_{k-j}e_j=0,\quad r\le k$$

という関係式が成立する（Newton の公式とよばれる）.

Remark 4.16. スピノール束上の通常のディラック作用素に対しては多様体は $4k$ 次元でないと意味がなかった．上の場合には $\hat{\mathbf{A}}(TM) \in H^{4*}(M,\mathbb{R})$ であるが，$\mathbf{E}$ のチャーン指標は偶数次数の微分形式で書ける．よって多様体の次元は $4k$ 次元でなくても非自明な指数が現れる．

Example 4.8. 偶数次元球面 S^{2n} 上の複素ベクトル束 $\mathbf{E}$ を考える．twiseted Dirac 作用素 $D_E^+ : \Gamma(\mathbf{S}^+ \otimes \mathbf{E}) \to \Gamma(\mathbf{S}^- \otimes \mathbf{E})$ を考える．この指数を計算しよう．球面を $\mathbb{R}^{2n+1}$ へ埋め込めば，normal 束が自明なので，$T(S^{2n}) \oplus TN = T(\mathbb{R}^{2n+1})|_{S^{2n}}$ を使って，ポントリャーギン類はすべて零であることがわかる．つまり $p_i(S^{2n}) = 0$ を得る．よって $\hat{\mathbf{A}}(S^{2n}) = 1$ である．そこで，twisted Dirac 作用素の指数定理から，

$$\mathrm{ind}\, D_E = \int_{S^{2n}} \hat{\mathbf{A}}(S^{2n}) ch(\mathbf{E}) = \int_{S^{2n}} ch(\mathbf{E}) = \int_{S^{2n}} ch_n(\mathbf{E})$$

となる．また $\mathbf{E}$ の全チャーン類を考える

$$c(\mathbf{E}) = 1 + c_1(\mathbf{E}) + \cdots + c_r(\mathbf{E}) \in H^0(S^{2n}) \oplus H^2(S^{2n}) \oplus \cdots \oplus H^{2n}(S^{2n})$$

となり，$H^i(S^{2n}) = 0$（$i \neq 0, 2n$）を使えば，

$$c(\mathbf{E}) = 1 + c_n(\mathbf{E})$$

となることがわかる．あとは基本対称式と冪和対称式の関係式を使えば，球面上では $c_n(\mathbf{E}) = (n-1)! ch_n(\mathbf{E})$ となることがわかる．よって，

$$\mathrm{ind}\, D_E = \frac{1}{(n-1)!} \int_{S^{2n}} c_n(\mathbf{E})$$

となる．指数は整数であったので，球面 S^{2n} 上の複素ベクトル束 $\mathbf{E}$ に対して，$c_n(\mathbf{E})$ は $(n-1)!$ で割り切れることがわかった．

Remark 4.17. もともとの Atiyah-Singer 指数定理では，楕円型微分作用の主表象を T^*M の K 群 $K_{cpt}(T^*X)$ の元だとみなして，位相的指数を定義する（see [13]）．

$u \in K_{cpt}(T^*X)$ が K 理論における**向き**とは，$K_{cpt}(T^*X)$ が u を生成元とする $K(X)$ 加群となることである．実はスピノール束のディラック作用素の主表象が K 理論における向きとなる．よって，他の楕円型作用素は主表象レベル（というか K 群レベル）では，ディラック作用素とあるベクトル束のテンソル積となる．これが**「ディラック作用素は指数定理において基本的である」**ことの理由である．かなりいい加減に述べているので，詳しいことは [13] p384 あたりを見よ．上の twisted ディラック作用素もそのことを反映している．

5 色々なスピノール

このSection では，スピン幾何学の一つの方向として，ツイスタースピノールとキリングスピノールについて学ぶ．かなり，マニアックな話である．この Section の話は，スピン幾何入門編というより，スピン幾何マニアック編である．

5.1　キリングスピノール

5.1.1　定義

Friedrich による固有値評価（定理 4.20）において，**等号が成立するスピノール**が存在した場合を考えてみる．そのスピノール $\phi \in \ker T$ に入るので**ツイスタースピノールである**が，さらに強い条件を満たすことがわかる．

$\kappa_0 := \min_{x\in M} \kappa(x)$ とすれば $D^2\phi = \frac{n}{4(n-1)}\kappa_0\phi$ であるので

$$D\phi = \pm\sqrt{\frac{n}{4(n-1)}\kappa_0}\,\phi$$

となるので，$\phi \in \ker T$ とあわせれば

$$\nabla_X\phi = \pm\sqrt{\frac{1}{4n(n-1)}\kappa_0}\,X\cdot\phi \quad \forall X$$

となる（下でみるようにこのようなスピノールが存在すれば M は正スカラー曲率をもつアインシュタイン多様体になる．よって $\kappa_0 = \kappa$）．そこで次のようなスピノールを定義する．

Definition 5.1. 次の条件を満たすスピノール $\phi \in \Gamma(\mathbf{S})$ を**キリングスピノール**とよぶ：ある定数 $\mu \in \mathbb{C}$ が存在して

$$\nabla_X\phi = \mu X\cdot\phi \quad \forall X$$

を満たす．

またこのとき**定数 μ をキリング数**とよぶ．

Remark 5.1. より一般的に，（複素数値）関数 f に対して，$\nabla_X\phi + \frac{f}{n}X\cdot\phi = 0$ を満たすスピノールを考えることができる．$Ref \not\equiv 0$ の場合には，f が実定数であり，ϕ が実キリングスピノールになってしまう（後述．proposition 5.32）．よって，一般化するにしても f を純虚数値の関数とすることになる．

Example 5.1. Friedrich の**固有値評価において等号をみたすスピノールはキリングスピノール**である．

Example 5.2. Hijazi 固有値評価において，等号が成立するスピノールはキリングスピノールである．また，そのようなスピノールがあるなら，Friedrich 固有値の場合の等号が成立．

Proof. Hijazi 固有値評価の証明を思い出せば，等号が成立するには，スピノール ϕ が，$D'\phi' = \lambda e^{-\sigma}\phi'$, $T'\phi' = 0$ を満たすときである．ここで「$'$」は共形変形した計量に対するものであることを意味する．そこで，

$$\nabla'_X\phi' + \frac{\lambda e^{-\sigma}}{n}X\cdot'\phi' = 0 \quad X \in \mathfrak{X}(M)$$

が簡単にわかる．上の Remark から．$\lambda \neq 0$ なら，$\lambda e^{-\sigma}$ は定数である．よって σ は定数となる．これより ϕ がキリングスピノールであることがわかる．また，σ が定数なら，$\kappa' e^{2\sigma} = \kappa$ となるので，

$$\lambda^2 = \frac{n}{4(n-1)} \inf_M \kappa' e^{2\sigma} = \frac{n}{4(n-1)} \inf_M \kappa$$

となる．

また $\lambda = 0$ の場合には，ϕ' が (M, g') 上の平行スピノールである． ■

固有値評価において,「等号が成立する多様体を分類せよ」という問題は微分幾何において自然である．そこで，今の場合は **「キリングスピノールをもつスピン多様体を分類せよ」** とう問題になる．この問題は Friedrich らドイツスピン幾何一派や Liechnerowicz などが研究し始めたことで，この問題は，N. Hitchin, M. Wang（平行スピノール [10], [16], [17]），C. Bär（実キリングスピノール [2]），H. Baum（純虚キリングスピノール [4]）により解かれる．H. Baum の結果は純虚数値関数キリングスピノールの分類へと一般化され，これも H. B. Rademacher により分類されている（[14]）．C. Bär の結果は単連結の仮定をおくので，完全に分類されたというわけではないが，それ以上やっても，目新しい結果が生まれないであろう．また，スピン c の場合への一般化もある（Herzlich and Morianu）．

キリングスピノールについて，いくつか基本的な事実を述べよう．

Proposition 5.1. **キリングスピノールはツイスタースピノール**である．

Proof.

$$D\phi = \sum e_i \nabla_{e_i} \phi = \sum e_i \mu e_i \phi = -n\mu\phi$$

となる．よって

$$\nabla_X \phi + \frac{1}{n} X D\phi = \mu X\phi - \mu X\phi = 0$$

となるので $\phi \in \ker T$ となる． ■

Proposition 5.2. M を偶数次元スピン多様体として，ϕ をキリング数 μ のキリングスピノールとする．このとき $\phi = \phi_+ + \phi_-$ とすれば，$\tilde{\phi} = \phi_+ - \phi_-$ はキリング数 $-\mu$ のキリングスピノールである．

Proof. $\nabla_X \phi_\pm = \mu X \phi_\mp$ であるので $\nabla_X(\phi_+ - \phi_-) = \mu X\phi_- - \mu X\phi_+ = -\mu X(\phi_+ - \phi_-)$ となる． ■

Remark 5.2. 上の命題における $\phi_\pm$ はツイスタースピノールであるが，キリングスピノールではない（ただし $\mu \neq 0$）．

次の命題はキリングスピノールという名前の由来である（一般的なことを Section 7.6 で述べる）．

Proposition 5.3. キリング数が実数のキリングスピノール ψ に対して，

$$V^\psi = \sqrt{-1}\sum(e_i\psi,\psi)e_i$$

は**キリングベクトル場**である．

Proof. まず．V^ψ は

$$\overline{V^\psi} = -\sqrt{-1}\sum(\psi,e_i\psi)e_i = \sqrt{-1}\sum(e_i\psi,\psi)e_i = V^\psi$$

となるので，実ベクトル場である．

ある点 x の近傍の局所直交フレームで $(\nabla e_i)_x = 0$ を満たすものをとる．

$$\begin{aligned}\nabla_X V^\psi &= \sqrt{-1}\sum(e_i\nabla_X\psi,\psi)e_i + \sqrt{-1}\sum(e_i\psi,\nabla_X\psi)e_i\\ &= \sqrt{-1}\mu(\sum(e_iX\psi,\psi)e_i + \sum(e_i\psi,X\psi)e_i)\\ &= \sqrt{-1}\mu\sum((e_iX - Xe_i)\psi,\psi)e_i\end{aligned}$$

（ここで μ が実数であることを使っていることに注意）．よって

$$g(\nabla_X V^\psi, Y) = \sqrt{-1}\mu((YX - XY)\psi,\psi)$$

となる. とくに $g(\nabla_X V^\psi, Y)$ は X, Y について交代である. よってキリングベクトルになる.（キリングベクトル場につい の詳細はSecion 7の共形キリングベクトル場の章をみよ）． ■

次の補題は重要である．

Lemma 5.4. (M,g) を連結スピン多様体として，恒等的に零でないキリングスピノールをもつとする．このとき**キリングスピノールにはゼロ点がない**．

また，**キリングスピノールの一点での値が定まれば，他の点での値も定まる**．

Remark 5.3. ツイスタースピノールには零点がある（後述）．

Proof. ϕ をキリングスピノールとする．点 x で $\phi(x) = 0$ とする．$\gamma(t)$ を x を通る任意の曲線とすれば，

$$\nabla_{\gamma'(t)}\phi(\gamma(t)) = \mu\gamma'(t)\phi(\gamma(t))$$

となる．そこで $\phi(\gamma(0)) = \phi(x) = 0$ とすれば，常微分方程式の解の存在と一意性から $\gamma(t)$ 上で $\phi = 0$ となる．M 連結なので，恒等的に $\phi = 0$ となるので矛盾．

同様に，解の存在と一意性から，キリングスピノール ϕ の一点での値が定まれば，任意の点での値が定まる.（もちろんキリング数の値が異なれば方程式は変わることに注意）． ■

Remark 5.4. 上の補題の別証明：$\nabla'_X := \nabla_X - \mu X$ とすれば，これはスピノール束上の接続になる．そして，キリング数が μ のキリングスピノールはこの接続に対して平行切断となる．平行切断は一点の値で定まるのであった．

5.1.2 色々なスピノール

次の定理によりキリングスピノールの考察は三つに場合わけされる.

Theorem 5.5. (M, g) を連結スピン多様体で，**キリングスピノールを持つ**とし，そのキリング数を μ と書く.

1. M は**アインシュタイン空間**である.
2. M のスカラー曲率は定数となるが,

   $$\mu^2 = \frac{1}{4}\frac{1}{n(n-1)}\kappa$$

   特に，**キリング数 μ は実数または純虚数**である．またキリング数 μ のキリングスピノールが存在したとき，他のキリングスピノールのキリング数は $\pm\mu$ となる.

そこで次の三つの場合が考えられる

1. キリング数が**実**で零でないとき：このときキリングスピノールを**実キリングスピノール**と呼ぶ．このとき M が**完備**とすれば，M は**アインシュタイン空間でスカラー曲率は正．そして M はコンパクト**．また，このときキリングスピノールは固有値が $\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{n-1}\kappa}$ の固有スピノールである．またキリングスピノールを ϕ とすれば，$\langle\phi, \phi\rangle$ は定数.
2. キリング数が**純虚数**の場合：このときキリングスピノールを**虚キリングスピノール**と呼ぶ．このとき M は**アインシュタイン空間でスカラー曲率が負．そして M は非コンパクト**．またキリングスピノールを ϕ とすれば，$\langle\phi, \phi\rangle$ は零点のない定数でない関数.
3. キリング数が**零**：このとき**キリングスピノールは平行スピノールである．M はリッチ平坦**になる.

この定理を証明するために補題を用意する.

Lemma 5.6. $\psi \in W_n$ をスピノールとして $\psi \neq 0$ とする．$u, v \in \mathbb{R}^n$ に対して，もし

$$(u + iv)\psi = 0$$

なら,

$$|u| = |v|, \quad \langle u, v\rangle = 0$$

が成り立つ.

Proof.

$$0 = (u + iv)(u + iv)\phi = \langle u, u\rangle\phi - \langle v, v\rangle\phi - 2i\langle u, v\rangle\phi$$

となる．$\phi \neq 0$ であるので，$|u| = |v|$ と $\langle u, v\rangle = 0$ がわかる． ■

Proof of Theorem. キリングスピノール ϕ に対して，$\nabla_X\nabla_Y\phi = \mu(\nabla_X Y)\cdot\phi + \mu^2 X\cdot Y\cdot\phi$ となる．よって

$$R_\Delta(X, Y)\phi = \mu^2(XY - YX)\phi$$

そこで (4.3) を使って

$$\sum e_i R_\Delta(X, e_i)\phi = \mu^2 e_i(e_i X - Xe_i)\phi = 2(1-n)\mu^2 X\phi = -\frac{1}{2}Ric(X)\phi$$

よって，$(Ric(X) - 4(n-1)\mu^2 X)\phi = 0$ となる．そこで

$$0 = \sum e_i(Ric(e_i) - 4(n-1)\mu^2 e_i)\phi = (-\kappa + 4n(n-1)\mu^2)\phi$$

となり，補題 5.4 からキリングスピノールには零点がなかったので，

$$\mu^2 = \frac{1}{4}\frac{1}{n(n-1)}\kappa$$

が成立する．特に κ は定数となり κ は実なので μ は実数か純虚数になる．

μ は実数か純虚数なので $(Ric(X)-4(n-1)\mu^2X)\phi = 0$ と補題 5.6 より $|Ric(X) - 4(n-1)\mu^2 X| = 0$ となり $Ric(X) = 4(n-1)\mu^2 X$ を得る．よってリッチ曲率が定数となり．M はアインシュタイン多様体になる．また，$\mu = 0$ の場合（平行スピノールが存在）なら $Ric = 0$ となる．

$\mu \neq 0$ かつ μ が実の場合には，M が完備を仮定すれば，リッチ曲率が正なのでマイヤースの定理 (命題 2.2) から多様体はコンパクトでなければならない．また，

$$D\phi = -n\mu\phi = \mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{(n-1)}\kappa}$$

となる．これは Friedrich の固有値評価で等号が成立する多様体である．

次に $\mu \neq 0$ で μ が純虚数 $\mu = ib$ の場合を考える．このときスカラー曲率は負のアインシュタイン多様体になる．M がコンパクトと仮定する．$D^2\phi = -n^2b^2\phi$ となるが，D^2 は非負の作用素であったので $\phi = 0$ となってしまう．よって M は非コンパクトでなければならない．

キリングスピノール ϕ を考える．このとき

$$X\langle\phi, \phi\rangle = \langle\nabla_X\phi, \phi\rangle + \langle\phi, \nabla_X\phi\rangle = (\mu - \bar{\mu})\langle X\cdot\phi, \phi\rangle$$

となる．よって，μ が実数なら，$X\langle\phi, \phi\rangle = 0$ であり，$\langle\phi, \phi\rangle$ は定数．μ が虚数 ib とすれば，$X\langle\phi, \phi\rangle = 2ib\langle X\cdot\phi, \phi\rangle$ となる．ϕ に零点はないので，$\langle\phi, \phi\rangle$ は非定数の零点がない関数である． ■

Remark 5.5. 上の定理から，Friedrich 固有値評価において，等号が成立する多様体があるなら，アインシュタイン多様体であり，実キリングスピノールをもつことがわかった．逆に，実キリングスピノールをもつ多様体を考えると，固有値評価で等号が成立する．よって，**「等号が成立する多様体の分類」と「実キリングスピノールをもつ多様体の分類」が同じこと**になる．

上の定理の証明からわかるように，２次元に場合を考えても，リッチテンソルが定数であることがわかる．よって，

Corollary 5.7. **２次元スピン多様体上にキリングスピノールがあれば，定曲率空間**である．

Corollary 5.8. (M, g) を**平行スピノール**をもつスピン多様体とする．このとき M は**リッチ平坦**となる．また (M, g) を 3 次元スピン多様体とし，平行スピノールを持てば，M はリーマン多様体として平坦になる．

Proof. 最初の主張はすでに証明した．また，３次元スピン多様体において，リッチ平坦ならリーマン曲率が零である． ■

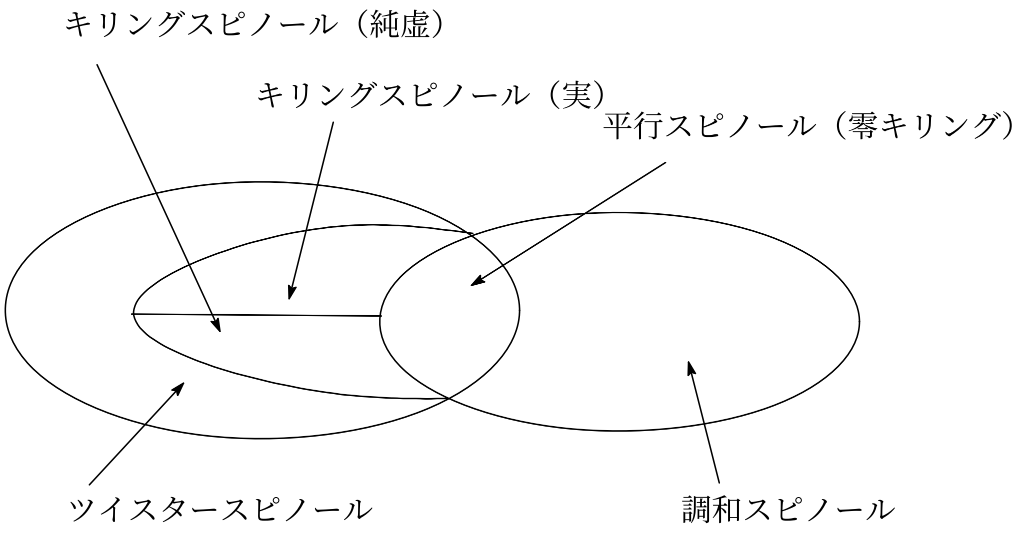
Corollary 5.9. **３次元スピン多様体がキリングスピノールを持てば，定曲率空間**である．

Proof. アインシュタイン多様体なので，リッチ曲率が定数である．３次元ならリーマン曲率はリッチテンソルのみで定まるので，定曲率空間になる． ■

今までの議論で，次のようなスピノールがでてきた

1. 平行スピノール．$\nabla\phi = 0$．多様体はリッチ平坦．
2. 調和スピノール．$D\phi = 0$．
3. ツイスタースピノール．$T\phi = 0$（$\nabla_X\phi + \frac{1}{n}XD\phi = 0$）．
4. 実キリングスピノール．$\nabla_X\phi = \mu X\cdot\phi$（$\mu \in \mathbb{R}$）．
5. 虚キリングスピノール．$\nabla_X\phi = \mu X\cdot\phi$（$\mu \in \sqrt{-1}\mathbb{R}$）．

これらの関係は次のようになる．



Remark 5.6. 上で挙げたスピノールの他にも，**純スピノール**および**平行純スピノール**とよばれるものもある．これは４次元ツイスター理論の一般化に使用するもである（see [13]）．これは，四元数ケーラーへの一般化とは異なる．また，４次元ツイスター理論の一般化はその他にもある（不定値計量への一般化や，表現論的な一般化など）．

また，キリング数 μ のキリングスピノールをもつ場合には，他のキリングスピノールは存在したとしても $\pm\mu$ のキリング数をもつ．また，計量を $g \to ag$（$a > 0$, a 定数）と変形すれば，実キリング数なら $\pm 1/2$, 虚キリングス数は $\pm\sqrt{-1}1/2$ となる．そこで,

Definition 5.2. 上のように正規化したとき，$\pm 1/2$（**resp.** $\pm\sqrt{-1}1/2$）**をキリング数とするキリングスピノールの空間を** $\mathcal{K}_\pm$ **とする**．このとき，$\mathcal{K}_\pm$ はベクトル空間であり，$\mathcal{K}_+ \oplus \mathcal{K}_- \subset \ker T$ となる．**多様体の次元が偶数なら** $\dim \mathcal{K}_+ = \dim \mathcal{K}_-$ **となる**.

キリング数 $1/2$ の実キリングスピノール ϕ をもつ場合を考える．$n \not\equiv 3 \mod 4$ の場合には，クリフォード作用と反可換な実構造または四元数構造 J が定義できた．そこで，$J\phi$ はキリング数 $-1/2$ の実キリングスピノールである．同様に，キリング数 $\sqrt{-1}\frac{1}{2}$ の虚キリングスピノール ϕ をもつ場合を考える．$n \not\equiv 1 \mod 4$ の場合には，クリフォード作用と可換な実構造または四元数構造 J が定義できた．このとき $J\phi$ はキリング数 $-\sqrt{-1}\frac{1}{2}$ の虚キリングスピノールである．よって

Proposition 5.10. 実キリングスピノールをもつ n 次元スピン多様体を考える．このとき $n \not\equiv 3 \mod 4$ なら $\dim \mathcal{K}_+ = \dim \mathcal{K}_-$ となる．また虚キリングスピノールをもつ n 次元スピン多様体を考えると，$n \not\equiv 1 \mod 4$ なら，$\dim \mathcal{K}_+ = \dim \mathcal{K}_-$ となる.

さて，補題 5.4 を思い出そう．キリングスピノールは一点での値で定まるのであった．キリング数が 1/2 の方程式の解はファイバーの次元しかない．$-1/2$ の場合も同様である．よって．$\dim \mathcal{K}_{\pm} \leq 2^{[n/2]}$ となることがわかる．

Proposition 5.11. $\dim \mathcal{K}_{\pm} \leq 2^{[n/2]}$ **である.**

Remark 5.7. $Ric \equiv 0$ となるスピン多様体があっても, その多様体が平行スピノールをもつとは限らない. 反例を挙げる.

$$X^4 = \{(x_1, \cdots, x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_1 > 0, 0 < x_2 < \pi\} \subset \mathbb{R}^4$$

これは可縮なのでスピン構造が唯一つはいる．計量を

$$ds^2 = \frac{x_1}{x_1 + c} dx_1^2 + x_1^2 dx_2^2 + x_1 \sin^2 x_2 dx_3^2 + \frac{x_1 + c}{x_1} dx_4^2$$

$(c > 0)$ で入れればリッチ平坦であるが平行スピノールは存在しない．もちろん，平坦な計量を入れれば，リッチ平坦であり，平行スピノールは存在する．このように，**特殊なスピノールの存在は一般には計量に依存している**.

Remark 5.8. トーラス T^n 上にはスピン構造がたくさん存在する（$H^1(M, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^n$）自明なスピン構造をとって，定数スピノールを考えれば，それは平行スピノールになる．しかし，自明でないスピノールをとった場合には，平行スピノールは存在しない．このように，上で述べた特殊なスピノールは**一般にスピン構造依存している**ことに注意する．

5.2 ツイスタースピノール

ツイスタースピノールをもう少し調べてみる．

5.2.1 ツイスタースピノールの有限次元性

Lemma 5.12. ψ をツイスタースピノールとする. このとき

$$\nabla_X (D\psi) = \frac{n}{2(n-2)} \left(\frac{\kappa}{2(n-1)} X - Ric(X)\right)\psi \tag{5.1}$$

Proof. ツイスター方程式 $\nabla_X \psi + \frac{1}{n} X D\psi = 0$（$X$ は任意）を一階微分して，

$$\nabla_{e_i} \nabla_X \psi + \frac{1}{n} (\nabla_{e_i} X) D\psi + \frac{1}{n} X \nabla_{e_i} (D\psi) = 0$$
$$\nabla_X \nabla_{e_i} \psi + \frac{1}{n} (\nabla_X e_i) D\psi + \frac{1}{n} e_i \nabla_X (D\psi) = 0$$

よって

$$R_\Delta (X, e_i)\psi + \frac{1}{n} e_i \nabla_X (D\psi) - \frac{1}{n} X \nabla_{e_i} (D\psi) = 0.$$

さらに e_i をかけて和をとれば，(4.3) および最適ボホナーワイゼンベック公式を使って，

$$\sum e_i R_\Delta(X,e_i)\psi = \nabla_X(D\psi) - \frac{1}{n}XD^2\psi - \frac{2}{n}\nabla_X(D\psi),$$
$$-\frac{1}{2}Ric(X)\psi = \frac{n-2}{n}\nabla_X(D\psi) - \frac{1}{n}X(\frac{n}{4(n-1)}\kappa\psi)$$

■

さて
$$K(X) := \frac{1}{n-2}(\frac{\kappa}{2(n-1)}X - Ric(X)) \tag{5.2}$$
とする．$K(X) : TM \to TM$ というテンソルである．

Remark 5.9. この $K(X)$ は 3 次元リーマン多様体の共形平坦性のときなどに現れるテンソルである．3 次元の場合には共形ワイルテンソルがないが，共形平坦であるための必要十分条件は

$$(\nabla_X K)(Y) - (\nabla_Y K)(X) = 0, \quad \forall X, Y$$

となる．

これを用いてスピノール束の直和 $\mathbf{S} \oplus \mathbf{S}$ 上に新しい共変微分を次で定義する．

$$\nabla^s_X := \begin{pmatrix} \nabla_X & \frac{1}{n}X\cdot \\ -\frac{n}{2}K(X)\cdot & \nabla_X \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

と定義する（共変微分であることは演習問題）．

Lemma 5.13. ψ をツイスタースピノールとすると，$(\psi, D\psi) \in \Gamma(\mathbf{S} \oplus \mathbf{S})$ は ∇^s-平行である．逆に ∇^s-平行なスピノールは $(\psi, D\psi)$ と書け，ψ はツイスタースピノールになる．

Proof.

$$\begin{pmatrix} \nabla_X & \frac{1}{n}X \\ -\frac{n}{2}K(X) & \nabla_X \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi \\ D\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla_X\psi + \frac{1}{n}XD\psi \\ -\frac{n}{2}K(X)\psi + \nabla_X D\psi \end{pmatrix} = 0$$

となる．

逆を証明する．(ϕ, ψ) を ∇^s-平行とすると，

$$\nabla_X\phi + \frac{1}{n}X\psi = 0, \quad -\frac{n}{2}K(X)\phi + \nabla_X\psi = 0$$

となる．よって，
$$D\phi = \sum e_i \nabla_{e_i}\phi = \sum_i \frac{1}{n}e_i e_i \psi = \psi$$
となる．よって，ϕ はツイスタースピノールである．■

Theorem 5.14 (有限次元性). $n \geq 3$として，Mをn次元スピン多様体とする．このとき**ツイスタースピノールの空間** $\ker T$ **は有限次元**である．$\dim \ker T \leq 2^{[n/2]+1}$．ここで多様体はコンパクトでなくてもよいことに注意する．

Proof. ∇^s-平行な切断は一点での値で定まる．そこでファイバーの次元を数えればよいので，$\dim \ker T \leq 2^{[n/2]+1}$となる． ■

次の系は$(\phi, D\phi)$が平行であることから従う．

Corollary 5.15. ψをツイスタースピノールとする．**ある点**x**での**$\psi(x)$**と**$(D\psi)(x)$**が定まれば，任意の点での値が定まる**．特に，ある点xで$\psi(x) = 0,\ D\psi(x) = 0$を満たすなら$\psi \equiv 0$である．

5.2.2 2次元の場合

上の計算では多様体の次元が二次元の時に$K(X)$が定義できない．二次元の場合は別で考える．Mを二次元スピン多様体として，$\{e_1, e_2\}$を正規直交フレームとする．$\phi = \phi_+ + \phi_- \in \Gamma(\mathbf{S}^+ \oplus \mathbf{S}^-)$をツイスタースピノールとすれば，ツイスター方程式は

$$\nabla_{e_1}\phi + \frac{1}{2}e_1(e_1\nabla_{e_1} + e_2\nabla_{e_2})\phi = \frac{1}{2}(\nabla_{e_1} + e_1e_2\nabla_{e_2})\phi = 0$$
$$\nabla_{e_2}\phi + \frac{1}{2}e_2(e_1\nabla_{e_1} + e_2\nabla_{e_2})\phi = \frac{1}{2}(\nabla_{e_2} + e_2e_1\nabla_{e_1})\phi = 0$$

となるので，ツイスタースピノールであるための必要十分条件は

$$(e_1\nabla_{e_1} - e_2\nabla_{e_2})\phi = 0 \quad (\iff (\nabla_{e_1} + e_1e_2\nabla_{e_2})\phi_\pm = 0)$$

である．同様に調和スピノールであるための必要十分条件は

$$(e_1\nabla_{e_1} + e_2\nabla_{e_2})\phi = 0 \quad (\iff (\nabla_{e_1} - e_1e_2\nabla_{e_2})\phi_\pm = 0)$$

となる．

もう少しわかりやすく書き換えてみる．体積要素を

$$\omega = ie_1e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

となるとする．つまりωは$\mathbf{S}^\pm$に± 1で作用するとする．このとき，調和スピノールの方程式（ディラック方程式）は,

$$(\nabla_{e_1} - e_1e_2\nabla_{e_2})\phi_\pm = (\nabla_{e_1} \pm \sqrt{-1}\nabla_{e_2})\phi_\pm = \nabla_{e_1} \pm \sqrt{-1}\nabla_{e_2}\phi_\pm = 0$$

となり，ツイスター方程式は

$$(\nabla_{e_1} + e_1 e_2 \nabla_{e_2})\phi_\pm = (\nabla_{e_1} \mp \sqrt{-1}\nabla_{e_2})\phi_\pm = \nabla_{e_1} \mp \sqrt{-1}\nabla_{e_2}\phi_\pm = 0$$

となる．よって，

$$\begin{aligned}
\phi \in \ker D &\iff \nabla_{\partial/\partial\bar{z}}\phi_+ = 0, \quad \nabla_{\partial/\partial z}\phi_- = 0 \\
\phi \in \ker T &\iff \nabla_{\partial/\partial z}\phi_+ = 0, \quad \nabla_{\partial/\partial\bar{z}}\phi_- = 0
\end{aligned}$$

となり，ほとんど同じ方程式となるのである．具体的に対応させるには，スピノール束上の実または四元数構造 J を用いる．この J は，スピノール束上の複素歪線形写像であり，クリフォード作用と可換なものである（反可換なものを入れることもできる）．また，$J : \mathbf{S}^\pm \to \mathbf{S}^\mp$ となるのであった．例えば，$\phi_+ \in \ker D^+ \subset \ker D$ とすれば，

$$\nabla_{\partial/\partial z} J\phi_+ = J\nabla_{\partial/\partial\bar{z}}\phi_+ = 0$$

となるので，$J\phi_+ \in \ker T^- \subset \ker T$ となる．以上から，

Proposition 5.16. **二次元スピン多様体上で，複素歪線形同型** $J : \mathrm{S} \to \mathrm{S}$ **により，** $J : \ker D \to \ker T$ **は同型**である（$\ker D^\pm \simeq \ker T^\mp$）．

Remark 5.10. ベクトル束の対応を見れば，

$$\mathbf{S}^\pm \otimes T^*(M) = \mathbf{S}^\pm \otimes (\Lambda^{1,0} \oplus \Lambda^{0,1}) = (\mathbf{S}^\pm \otimes \Lambda^{1,0}) \oplus (\mathbf{S}^\pm \otimes \Lambda^{0,1})$$

となる．この対応をみても，ツイスター作用素とディラック作用素が複素共役の関係にあることがわかるであろう．

このように，ツイスタースピノールを考えたければ，調和スピノールを考えればよい．

さて，例えば $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ を考えると，正則関数 $f(z)$ を与えれば，$f(z) \in \ker T$ となることがわかる．つまり，$\mathbb{C}$ 上で，

$$\ker T = \{\text{ 正則関数 }\} \oplus \{\text{ 歪正則関数 }\} = \ker D$$

となる．この例をみてわかるように，**二次元の場合には，**$\ker T$ **は有限次元とは限らない**．もちろん，コンパクトなら T^*T も D も楕円型なので，$\ker T, \ker D$ は有限次元になる．

そこで，以下，ツイスタースピノールを考える場合には，多様体の次元が 3 以上と仮定して話を進める．

5.2.3 例：ユークリッド空間上ツイスタースピノール

Example 5.3. ユークリッド空間 $M=\mathbb{R}^n$ を考える．$\phi: M\to W_n$ を定数スピノールとする．これは平行スピノールであるのでツイスタースピノールである．また，$x\in\mathbb{R}^n$ に対して $X=\sum x_ie_i$ として，

$$\phi'(x) := X\cdot\phi = \sum x_ie_i\phi$$

を考える．このとき，

$$\nabla_{e_i}\phi' = \frac{\partial}{\partial x_i}(\sum x_je_j\phi) = e_i\phi, \quad \frac{1}{n}e_iD\phi' = \frac{1}{n}e_i\sum_k e_k\frac{\partial}{\partial x_k}(\sum_j x_je_j\phi) = -e_i\phi$$

となるので $\phi'(x)$ はツイスタースピノールである（これはキリングスピノールではないことに注意する）．よって，$\dim\ker\nabla = 2^{[n/2]}$ であり，$\dim\ker T = 2^{[n/2]+1}$ となる．そして上で上げたもの以外にはツイスタースピノールは存在しない．また，$\mathbb{R}^n$ 上のツイスタースピノールの零点は高々一点である．

5.2.4 例：球面上のキリングスピノール

Example 5.4. 球面 (S^n,g) を考える．ここで g は標準的な計量とする．N を北極として，$S^n\setminus N$ は立体射影により $\mathbb{R}^n$ と共形同値である．実際，計量は

$$g = e^{2\sigma}g_0 = \frac{4}{(1+|x|^2)^2}g_0, \quad g_0 = \sum dx_i^2$$

となる．Section 4.3 を参考にして，正規直交基底の対応は，

$$e_i' = \frac{1+|x|^2}{2}e_i = e^{-\sigma}e_i$$

となる．また，grad $e^\sigma = e^\sigma\mathrm{grad}\sigma$ であるので，

$$\mathrm{grad}\sigma = -e^\sigma\sum x_ie_i$$

となる．共変微分の対応を書けば，

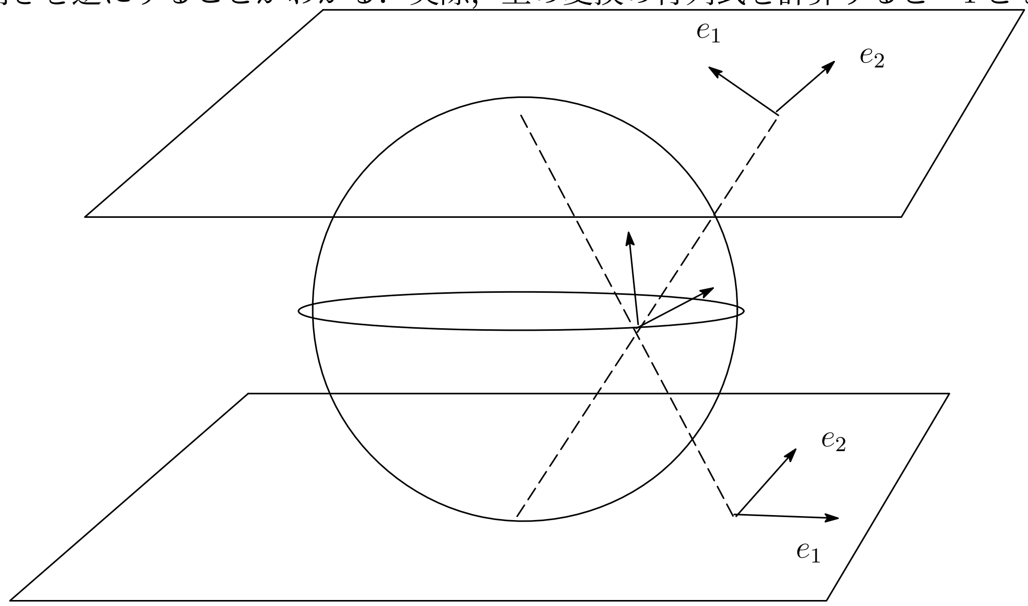
$$\nabla'_{e_i'}\Psi = \Psi\{e^{-\sigma}\nabla_{e_i} + \frac{1}{4}(-x\cdot e_i\cdot + e_i\cdot x\cdot)\}$$

となる．

$S^n\setminus S$ の座標を y を使えば (S は南極)，$y=x/|x|^2$ となる．そこで正規直交基底の変換は

$$\frac{1+|x|^2}{2}\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{1+|y|^2}{2}\frac{\partial}{\partial y_i} - \frac{2y_i}{|y|}\sum_j\frac{y_j}{|y|}\frac{1+|y|^2}{2}\frac{\partial}{\partial y_j}$$

となる．しかし，立体射影の定義からわかるように，$y = x/|x|^2$ という変換関数は向きを逆にすることがわかる．実際，上の変換の行列式を計算すると -1 となる．



そこでスピノール束の変換行列も $Pin(n)$ に値を持つようにする．その推移関数は $\frac{x}{|x|}\cdot$ である．実際，振れ随伴表現を使えば，

$$-\frac{x}{|x|}e_i(\frac{x}{|x|})^{-1} = \frac{x}{|x|}e_i\frac{x}{|x|} = e_i - 2x_i x = e_i - 2\frac{y_i}{|y|}\sum_j \frac{y_j}{|y|}e_j$$

となり，先ほどの正規直交基底の変換を得る．

さて，ツイスター作用素は共形共変一階微分作用素であったので，$\mathbb{R}^n$ のツイスタースピノールを ϕ とすれば，$e^{\sigma/2}\phi$ は $S^n \setminus N$ 上のツイスタースピノールになる．そこで，u, v を $\mathbb{R}^n$ 上の定数スピノールとして，

$$U(x) = \frac{u + x\cdot v}{\sqrt{1+|x|^2}}$$

が $S^n \setminus N$ 上のツイスタースピノールである．また $x \to \infty$ として有界である．別の言い方をすれば，$S^n \setminus S$ の座標 y を使えば，

$$\frac{x}{|x|}U(y) = \frac{y}{|y|}U(y) = \frac{y}{|y|}\frac{|y|u + \frac{y}{|y|}\cdot v}{\sqrt{1+|y|^2}} = \frac{y\cdot u - v}{\sqrt{1+|y|^2}}$$

となるので，$y = 0$ で定義できるのである．よって，S^n 全体で定義できることになる．

さて，

$$\nabla'_{e'_i}\Psi(U) = \Psi(e^{-\sigma}\nabla_{e_i}U + \frac{1}{2}e_i\cdot x\cdot U + \frac{1}{2}x_i U) = \Psi(\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+|x|^2}}e_i(xu+v))$$

となる．そこで，$v=\pm u$ とすれば，

$$\nabla'_{e'_i}\Psi(U)=\pm\frac{1}{2}e'_i\cdot\Psi(U)$$

となりキリング数が $\pm 1/2$ のキリングスピノールになる（$S^n\setminus S$ でも同様の計算が成立．ただし，変な自明化をしてるから符合がかわるけど）．

標準球面（半径１）のスカラー曲率は $\kappa=n(n-1)$ であるので，ϕ をキリング数が $\pm 1/2$ のキリングスピノールとすれば，

$$D\phi=-n\mu\phi=\mp\frac{n}{2}\phi$$

となる．一方 Friedrich 固有値評価よれば，球面上のディラック作用素の固有値 λ は

$$\lambda^2\geq\frac{n}{4(n-1)}\min_x\kappa(x)=\frac{n^2}{4}$$

をみたす．この等号を成立させる固有スピノールが上で挙げたキリングスピノールである．また，他に等号を成立させる固有スピノールがあるとすると，キリングスピノールになってしまうが $\dim\mathcal{K}_+ + \dim\mathcal{K}_- \leq 2^{[n/2]+1}$ であることに矛盾する．

Proposition 5.17. 標準球面 S^n 上で，キリング数が $\pm 1/2$ のキリングスピノール全体の空間を $\mathcal{K}_\pm$ とすれば，$\dim\mathcal{K}_\pm=2^{[n/2]}$ **となる**．よって，$\dim\mathcal{K}_+ + \dim\mathcal{K}_- = 2^{[n/2]+1}$．また，これら以外に独立なツイスタースピノールは存在しない．

これらのキリングスピノールに対して，***Friedrich* 固有値評価において等号が成立**する．そして，D^2 の最小固有値は $n^2/4$ であり，重複度は $2^{[n/2]+1}$ となる．

このように，Friedrich 固有値評価が sharp であることがわかった．ただし，等号が成立する多様体は球面だけに限らないことに注意する．

Remark 5.11. 球面は実キリングスピノールをもつスピン多様体の中で，かなり特別であることを見ておく．

一般の完備連結スピン多様体 M を考える．M 上に実キリングスピノールでキリング数が $\mu\neq 0$ および $-\mu$ であるものがあると仮定する（よって M はコンパクトアインシュタインスピン多様体）．それぞれのキリングスピノールを ϕ,ψ としておく．このとき，

$$\nabla_X\phi=\mu X\phi,\quad \nabla_X\psi=-\mu X\phi,$$

が成立した．また，$D^2=\nabla^*\nabla+\kappa/4=\nabla^*\nabla+n(n-1)\mu^2$ より．

$$n^2\mu^2\phi=D^2\phi=\nabla^*\nabla\phi+n(n-1)\mu^2\phi$$

となるので，$\nabla^*\nabla\phi=n\mu^2\phi=\frac{\kappa}{4(n-1)}\phi$ が成立する．さて，M 上の関数 $f=\langle\phi,\psi\rangle$ を考える．$(\nabla e_i)_x=0$ なる正規直交フレームをとって，

$$\begin{aligned}\Delta f=\nabla^*\nabla f=&-\sum\nabla_{e_i}\nabla_{e_i}f\\ =&\langle\nabla^*\nabla\phi,\psi\rangle+\langle\nabla^*\nabla\psi\rangle-2\sum\langle\nabla_{e_i}\phi,\nabla_{e_i}\psi\rangle\\ =&\frac{\kappa}{2(n-1)}\langle\phi,\psi\rangle+\frac{\kappa}{2(n-1)}\langle\phi,\psi\rangle=\frac{\kappa}{n-1}f\end{aligned}$$

が成立する．つまり f はラプラシアンの固有値である．さて，Section 7 で見るように，コンパクトリーマン多様体が $Ric \geq (n-1)r > 0$ を満たせば，定数関数以外の固有関数の固有値は $\lambda \geq nr > 0$ を満たす．更に，小畠の定理から等号が成立すれば，球面になってしまう．よって，今の場合に当てはめると，f は等号を満たす固有関数であるので，M が球面でなければ，$f = 0$ となる．よって，

Proposition 5.18. M を完備連結スピン多様体で，球面の等長同型でないとする．このとき ϕ, ψ をキリング数が $\mu,\ -\mu$ の実キリングスピノールとすれば，$\langle \phi, \psi \rangle \equiv 0$（各点で零）となる．

Remark 5.12. Bär により，コンパクトスピン多様体上で，$\dim \mathcal{K}_+ = 2^{[n/2]}$ なら，M は球面か実射影空間であることが知られている（ただし，実射影空間の場合は $n = 3 \mod 4$）[3]．また，偶数次元で次元が 6 以外の場合には，実キリングスピノールをもつなら球面となることが知られている [2]（後でもう少し詳しく述べる）．

5.2.5　例：双曲空間上のキリングスピノール

双曲空間 H^n という双曲空間を $\mathbb{R}^n$ 内の開球とみなす．このとき計量は

$$g = \frac{4}{(1-|x|^2)^2} g_0, \quad g_0 = \sum dx_i^2$$

となる．球面の場合とまったく同様のことをする（ただし，張り合わせは必要ない）．正規直交基底の対応は，

$$e_i' = \frac{1-|x|^2}{2} e_i = e^{-\sigma} e_i$$

となる．また，$\mathrm{grad} e^\sigma = e^\sigma \mathrm{grad}\sigma$ であるので，

$$\mathrm{grad}\sigma = e^\sigma \sum x_i e_i$$

となる．共変微分の対応を書けば，

$$\nabla'_{e_i'} \Psi = \Psi\{e^{-\sigma} \nabla_{e_i} + \frac{1}{4}(x \cdot e_i \cdot - e_i \cdot x \cdot)\}$$

となる．このとき，u, v を定数スピノールとすれば，

$$U(x) = \frac{u + xv}{\sqrt{1-|x|^2}}$$

は H^n 上のスピノールになる．

$$\nabla'_{e_i'} \Psi(U) = \Psi(e^{-\sigma} \nabla_{e_i} U - \frac{1}{2} e_i \cdot x \cdot U - \frac{1}{2} x_i U) = \Psi(\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-|x|^2}} e_i(-xu + v))$$

そこで，$v = \pm\sqrt{-1}u$ とすれば，

$$\nabla'_{e_i'} \Psi(U) = \pm\sqrt{-1} \frac{1}{2} e_i' \Psi(U)$$

となる．

Proposition 5.19. **双曲空間 H^n 上にはキリング数 $\pm\sqrt{-1}/2$ のキリングスピノールの空間を $\mathcal{K}_\pm$ とすれば，$\dim \mathcal{K}_\pm = 2^{[n/2]}$ となる．** また，それら以外には独立なツイスタースピノール（よってキリングスピノールも）は存在しない．

5.2.6 ツイスタースピノールの零点

次にツイスタースピノールの零点について考える．

Proposition 5.20. 恒等的に零でない**ツイスタースピノールのゼロ点の集合**

$$Z_\phi = \{x \in M | \phi(x) = 0\} \tag{5.4}$$

は孤立点である．

Proof. M 上の関数 $|\phi|^2 = \langle \phi, \phi \rangle$ を考える．まず，

$$\mathrm{grad}|\phi|^2 = \sum \nabla_{e_i}\langle \phi, \phi \rangle e_i = \sum \langle \nabla_{e_i}\phi, \phi \rangle e_i + \langle \phi, \nabla_{e_i}\phi \rangle e_i = -\frac{1}{n}\sum(\langle e_i D\phi, \phi \rangle + \langle \phi, e_i D\phi \rangle)e_i$$

が成立．そこで点 x で $\phi(x) = 0$ とすると，x は $|\phi|^2$ の臨界点である．ゼロ点でのヘシアンを計算しよう．

$$\begin{aligned}
&(XY|\phi|^2)(x) \\
=&\langle \nabla_Y \nabla_X \phi, \phi \rangle + \langle \nabla_X \phi, \nabla_Y \phi \rangle + \langle \nabla_Y \phi, \nabla_X \phi \rangle + \langle \phi, \nabla_Y \nabla_X \phi \rangle \\
=&\frac{1}{n^2}\{\langle XD\phi, YD\phi \rangle(x) + \langle YD\phi, XD\phi \rangle(x)\} \\
=&\frac{2}{n^2} g(X, Y)|D\phi(x)|^2
\end{aligned}$$

となるので, 関数 $|\phi|^2$ のゼロ点 x でのヘシアンは

$$Hess_x|\phi|^2(X, Y) = \frac{2}{n^2}(X, Y)|D\phi(x)|^2$$

となる．そこで系 5.15 より，$D\phi(x) = 0$ なら $\phi \equiv 0$ となってしまうので仮定に反する．よって，ゼロ点において $D\phi(x) \neq 0$ としてよいので，ヘシアンは非退化である．つまり，ϕ のゼロ点は関数 $|\phi|^2$ の非退化な臨界点の集合に含まれる．よって孤立点である． ■

Remark 5.13. ツイスタースピノールの零点については，もうすこしいろいろなことが知られている [5].

5.2.7 ツイスタースピノールと共形ワイルテンソル

さて，ツイスタースピノールと共形ワイルテンソルとの関係を見ていこう．そこで (5.3) における ∇^s の曲率を計算したいのであるが，リーマン曲率テンソルに関する補題をいくつか必要とする．

Lemma 5.21. 式 (5.2) の K を K_{ij} とテンソル表示すれば，

$$K_{ij} = \frac{1}{n-2}(\frac{\kappa}{2(n-1)}\delta_{ij} - R_{ij}) = E_{ij} - \frac{\kappa}{2n(n-1)}\delta_{ij}$$

となるが，このとき

$$W_{ijkl} = R_{ijkl} - \delta_{jl}K_{ik} - \delta_{ik}K_{jl} + \delta_{jk}K_{il} + \delta_{il}K_{jk}$$

が成立するので，

$$\frac{1}{4}\sum_{k,l} W_{ijkl}e_k e_l = \frac{1}{4}(\sum_{k,l} R_{ijkl}e_k e_l) + \frac{1}{2}(\sum_{k,l} K_{il}e_j e_l + K_{jl}e_l e_i) + K_{ij}$$

Proof. 直接計算すればよい． ∎

Lemma 5.22. 共形ワイルテンソルの発散を $\delta W = -\sum \nabla^i W_{ijkl}$ とする．

$$\delta W = -\sum_i \nabla^i W_{ijkl} = (n-3)(\nabla_l K_{kj} - \nabla_k K_{lj})$$

となる．特に $n \geq 4$ なら，$\delta W = 0$ と $(\nabla_X K)(Y) - (\nabla_Y K)(X) = 0$（$\forall X, Y$）は同値である．

Proof. 第二ビアンキ恒等式を縮約すればよい．面倒だけど直接計算なので演習問題． ∎

Remark 5.14. $n \geq 4$ のとき，$W = 0$ なら $\nabla_l K_{kj} - \nabla_k K_{lj} = 0$ を得る．一方 $n = 3$ のときは，$W = 0$ であったとしても，上の式から $\nabla_l K_{kj} - \nabla_k K_{lj} = 0$ を導けない．実際，$\nabla_l K_{kj} - \nabla_k K_{lj} = 0$ であることが 3 次元多様体 M が共形平坦であることが同値である．またアインシュタイン多様体なら K は定数になるが，アインシュタイン多様体上では $\delta W = 0$ を得る．その意味で $\delta W = 0$ を満たす多様体をアインシュタイン多様体の一般化とみなすこともある．

さて，∇^s の曲率を計算しよう．

$$\begin{pmatrix} \nabla_X & \frac{1}{n}X \\ -\frac{n}{2}K(X) & \nabla_X \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \nabla_Y & \frac{1}{n}Y \\ -\frac{n}{2}K(Y) & \nabla_Y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \nabla_Y & \frac{1}{n}Y \\ -\frac{n}{2}K(Y) & \nabla_Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \nabla_X & \frac{1}{n}X \\ -\frac{n}{2}K(X) & \nabla_X \end{pmatrix}$$
$$- \begin{pmatrix} \nabla_{[X,Y]} & \frac{1}{n}[X,Y] \\ -\frac{n}{2}K([X,Y]) & \nabla_{[X,Y]} \end{pmatrix}$$

を計算すると，$R_\Delta(X,Y)\phi=\frac{1}{2}R(X,Y)\phi$ に注意すれば，

$$
\begin{aligned}
&R_\Delta(X,Y)-\frac{1}{2}XK(Y)+\frac{1}{2}YK(X)=\frac{1}{2}W(X,Y)\cdot,\quad (1{,}1)\text{ 成分}\\
&\frac{1}{n}(\nabla_X Y+X\nabla_Y-\nabla_Y X-Y\nabla_X-[X,Y])=0,\quad (1{,}2)\text{ 成分}\\
&-\frac{n}{2}(K(X)\nabla_Y+\nabla_X K(Y)-K(Y)\nabla_X-\nabla_Y K(X)-K([X,Y]))\\
&=\frac{n}{2}((\nabla_Y K)(X)-(\nabla_X K)(Y)),\quad (2{,}1)\text{ 成分}\\
&-\frac{1}{2}(K(X)Y-K(Y)X)+R_\Delta(X,Y)=\frac{1}{2}W(X,Y)\cdot,\quad (2{,}2)\text{ 成分}
\end{aligned}
$$

となる．よって，ϕ をツイスタースピノールとして，$(\phi,D\phi)$ が ∇^s-平行であることから，

$$R^s(X,Y)\begin{pmatrix}\phi\\ D\phi\end{pmatrix}=0$$

であるので，次が成立する．

Proposition 5.23 (ツイスタースピノールと共形ワイルテンソル)**.** ϕ をツイスタースピノールとすれば，

$$W(X,Y)\cdot\phi=0,\quad W(X,Y)D\phi+n((\nabla_Y K)(X)-(\nabla_X K)(Y))\phi=0$$

が成立する．さらに $n\geq 4$ かつ $\delta W=0$ なら $W(X,Y)D\phi=0$ を得る．

いくつか応用を挙げる．3 次元多様体が平行スピノールを持てば，平坦であることは証明した．また，キリングスピノールをもてば定曲率空間であった．次は，その中間にある命題である．

Corollary 5.24. **連結 3 次元リーマン多様体がツイスタースピノールを持つなら，共形平坦である．**

Proof. 3 次元なら $W=0$ であるので，$((\nabla_Y K)(X)-(\nabla_X K)(Y))\phi=0$ を得る．$\phi(x)\neq 0$ となる点で $|(\nabla_Y K)(X)-(\nabla_X K)(Y)|=0$ を得る．よって，$(\nabla_Y K)(X)-(\nabla_X K)(Y)=0$ となる．またゼロ点の集合は孤立点であったので，$(\nabla_Y K)(X)-(\nabla_X K)(Y)=0$ は M の稠密な集合上で成立する．よって M 全体で $(\nabla_Y K)(X)-(\nabla_X K)(Y)=0$ を得る．この式は M が共形平坦であることと同値であった.（正確には，局所的共形平坦）. ■

$\nabla R=0$ をみたす多様体を**局所対称空間**というが，$\nabla W=0$ をみたすときは**共形対称**とよぶ．また共形対称なら $\delta W=0$ である．

Corollary 5.25. 共形対称なリーマン多様体を考える．ツイスタースピノール ϕ が存在して，$D\phi$ の零点が孤立点のみと仮定すれば，$W=0$ となる．つまり共形平坦多様体である．

Proof. ϕをツイスタースピノールとする．

$$\begin{aligned}(\nabla_Z W)(X,Y)\cdot\phi = \nabla_Z(W(X,Y))\cdot\phi - W(\nabla_Z X,Y)\phi - W(X,\nabla_X Y)\cdot\phi \\ =&\nabla_Z(W(X,Y)\cdot\phi) - W(X,Y)\nabla_Z\phi \\ =&\frac{1}{n}W(X,Y)\cdot Z\cdot D\phi\end{aligned}$$

となる．そこで，2-form $W(X,Y)$に対して，

$W(X,Y)\cdot Z = Z\wedge W(X,Y)+\iota(Z)W(X,Y)$ （交代形式への右クリフォード作用）

であり．交代形式のスピノールへの作用を考えると，

$$(Z\wedge W(X,Y)+\iota(Z)W(X,Y)) = Z\cdot W(X,Y)+2(\iota(Z)W(X,Y))\cdot$$

となる．よって，

$$(\nabla_Z W)(X,Y)\phi = \frac{1}{n}(Z\cdot W(X,Y)\cdot D\phi + 2(\iota(Z)W(X,Y))\cdot D\phi)$$

となる．

さて$\nabla W=0$という仮定すると，$\delta W=0$であり，$W(X,Y)D\phi=0$を得る．よって，上の式は，$\iota(Z)W(X,Y)\cdot D\phi=0$となる．$D\phi$の零点以外で，$\iota(Z)W(X,Y)=0$．よって$W=0$を得る．$D\phi$のゼロ点は孤立していると仮定してるので，$M$上で$W=0$を得る． ■

5.2.8 ツイスタースピノールとキリングスピノールの関係

キリングスピノールはツイスタースピノールであったが，ツイスタースピノールはキリングスピノールとなるわけではない．以下では，ツイスタースピノールとキリングスピノールの関係をみていこう．

Proposition 5.26. **コンパクト**スピン多様体で**スカラー曲率が定数**とする．このとき，**ツイスタースピノールが存在するなら，アインシュタイン空間**となる．さらに，スカラー曲率が正なら

$$\mathcal{K}_+\oplus\mathcal{K}_- = \ker T$$

となり，キリング数$\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\kappa}{n(n-1)}}$である．また，スカラー曲率が零なら$\ker\nabla = \ker T$となる．

Proof. スカラー曲率が零なら，最適ボホナーワイゼンベック公式及びコンパクトであることから，$\ker T=\ker D$となる．よって，$\ker T=\ker D=\ker\nabla$となる．よって，平行スピノールとツイスタースピノールは一致する．

次にスカラー曲率が零でないとする．ϕ をツイスタースピノールとすると最適ボホナーワイゼンベック公式から，

$$D^2\phi = \frac{n}{4(n-1)}\kappa\phi$$

となる．また $\ker(D-\lambda) \oplus \ker(D+\lambda) = \ker(D^2-\lambda^2)$ であったので，つまり，

$$\phi_\pm = \frac{1}{\lambda}(\pm\lambda\phi + D\phi)$$

とすれば，$\phi = \phi_+ + \phi_-$ であり，$D\phi_\pm = \pm\lambda\phi$ となる．さらに，最適ボホナーワイゼンベック公式を使えば，$T^*T\phi_\pm = 0$ を得る．また，コンパクトより $T\phi_\pm = 0$ となる．よって，

$$0 = \nabla_X\phi_\pm + \frac{1}{n}XD\phi_\pm = \nabla_X\phi_\pm + \frac{\pm\lambda}{n}X\phi_\pm$$

となるので $\phi_\pm$ はキリングスピノールである．よって，M はキリングスピノールをもつのでアインシュタイン空間である． ■

上で見たように，コンパクトリッチ平坦多様体上ではツイスタースピノールと平行スピノールは一致する．コンパクトでない場合に，最適ボホナーワイゼンベック公式を使えば，$\ker T \subset \ker D^2$ まではわかる．しかし $\ker D^2 \neq \ker D$ であるので，ツイスタースピノールは平行になるとは限らない．また，よく知られているように，完備スピン多様体上において，$L^2(\mathbf{S})$ 上で $\ker D = \ker D^2$ となるが，ツイスタースピノールは $L^2(\mathbf{S})$ に入るとは限らない．実際，$\mathbb{R}^n$ 上にはツイスタースピノールだが平行スピノールでないものが存在した．そのツイスタースピノールは $L^2(\mathbf{S})$ に入らない．

Corollary 5.27. M を**コンパクト**スピン多様体で**ツイスタースピノールを持つ**とする（$\dim\ker T \neq 0$）．このとき計量 g をうまく共形変形すれば，M はアインシュタイン空間となり

$$\mathcal{K}_+ \oplus \mathcal{K}_- = \ker T, \quad (or\ \ \ker\nabla = \ker T)$$

とすることができる．

Proof. 山辺問題の解決により, コンパクトリーマン多様体 M の計量を共形変形すれば，スカラー曲率が定数にできる．よって我々はスカラー曲率が定数であるとしてよい．$\ker T$ は共形不変であったので，$\ker T \simeq \ker T'$ に注意する．あとは前命題をつかえばよい． ■

次の命題は，M **がもしキリングスピノール（キリング数** $\neq 0$**）をもつなら，ツイスタースピノールとキリングスピノールは区別しなくてもよい**ことを述べている（M が非コンパクトでもよい）.

Proposition 5.28. M を**アインシュタイン空間でスカラー曲率（定数）が零でない**とする．このとき，

$$\mathcal{K}_+ \oplus \mathcal{K}_- = \ker T$$

が成立する．また，キリング数は $\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\kappa}{n(n-1)}}$ である.（M はコンパクトでなくてもよい）.

Proof. ϕ をツイスタースピノールとする．アインシュタイン空間なので $Ric = \frac{\kappa}{n}g$ となる．そこで，式 (5.1) を使えば，

$$\nabla_X(D\phi) = -\frac{\kappa}{4(n-1)}X \cdot \phi$$

を得る．そこで，$\mu = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\kappa}{n(n-1)}}$ として，

$$\psi_\pm = \mp\mu\phi + \frac{1}{n}D\phi$$

と定義すれば，

$$\begin{aligned}\nabla_X\psi_\pm &= \mp\,\mu\nabla_X\phi + \frac{1}{n}\nabla_X D\phi \\ &= \pm\,\frac{\mu}{n}XD\phi - \mu^2 X\cdot\phi \\ &= \pm\,\mu X\cdot(\mp\mu\phi + \frac{1}{n}D\phi) = \pm\mu X\psi_\pm\end{aligned}$$

となり，$\psi_\pm$ はキリングスピノールであり，キリング数 $\pm\mu$ である．また，

$$\phi = \frac{1}{2\mu}(\phi_- - \phi_+)$$

であるので，ツイスタースピノールはキリングスピノールの和でかける． ■

ツイスタースピノールにゼロ点が存在することを見たが，ゼロ点を除いて共形変形すれば，ツイスタースピノールをキリングスピノールの和にすることができることを見ていこう.

Proposition 5.29. M をスピン多様体でツイスタースピノール ϕ で $|\phi|^2 \equiv 1$ となるものがあるとする. このとき M はアインシュタインであり，

$$\kappa = \frac{4(n-1)}{n}|D\phi|^2$$

は定数となる.

Proof. $|\phi|^2 \equiv 1$ であるので $\Re\langle X\phi, D\phi\rangle = 0$ を得る．さて (5.1) より，

$$\begin{aligned}\frac{n}{2}g(K(X),Y) &= \langle \nabla_X D\phi, Y\phi\rangle \\ &= \nabla_X\langle D\phi, Y\phi\rangle - \langle D\phi, \nabla_X(Y\phi)\rangle \\ &= \Re(\nabla_X\langle D\phi, Y\phi\rangle - \langle D\phi, (\nabla_X Y)\phi\rangle + \frac{1}{n}\langle D\phi, YXD\phi\rangle) \\ &= -\frac{1}{n}g(X,Y)|D\phi|^2.\end{aligned}$$

よって

$$K(X) = \frac{1}{n-2}(\frac{\kappa}{2(n-1)}X - Ric(X)) = -\frac{2}{n^2}|D\phi|^2X,$$

となり，

$$Ric(X) = \frac{\kappa}{2(n-1)}X + (n-2)\frac{2}{n^2}|D\phi|^2X$$

となる. このように $Ric = f(x)g$ となる場合には（$\dim M \geq 3$）f は定数となる. よってアインシュタイン空間である．また，

$$\kappa = \frac{4(n-1)}{n}|D\phi|^2$$

となる. ■

Corollary 5.30. 上の命題において $\kappa = 0$ となるなら，ϕ は平行スピノールである.（非コンパクトでもよい）.

Proof. $|D\phi|$ は定数で零であるので，$D\phi \equiv 0$ を得る．ϕ はツイスタースピノールであったので $\nabla\phi = 0$ となるので平行スピノールである. ■

Example 5.5. ユークリッド空間上の定数スピノール ϕ で，$|\phi|^2 \equiv 1$ を満たすものは，平行スピノールである.（see section 5.2.3）

上の命題を使えば次はすぐに分かる.

Corollary 5.31. M をスピン多様体でツイスタースピノール ϕ をもつとする. 零点の集合を

$$Z_\phi := \{x \in M | \phi(x) = 0\} \tag{5.5}$$

とする（孤立点のみからなるのであった）．このとき，$M \setminus Z_\phi$ 上で $g' = \frac{1}{|\phi|^4}g$ と共形変形したとき，アインシュタイン空間になる．また，$\phi/|\phi|$ は実キリングスピノールの和になる．ただし，$M \setminus Z_\phi$ は完備でないことに注意する.

Example 5.6. ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ を考え，ツイスタースピノール $\phi = u \pm x \cdot u$ を考える．ここで u は $|u| = 1$ の定数スピノールであり，$x = \sum x_i e_i$ である．このとき，

$$|\phi|^2 = \langle u,u\rangle + \langle u, \pm xu\rangle + \langle \pm xu, u\rangle + \langle xu, xu\rangle = 1 - \langle \pm xu, u\rangle + \langle xu, u\rangle + |x|^2\langle u,u\rangle = 1 + |x|^2$$

となる，また零点は存在しない．そこで，計量として

$$g' = \frac{1}{(1+|x|^2)^2} g_0$$

を考えると，これは立体射影した場合の球面の計量である．そして，

$$\phi/|\phi| = \frac{u \pm xu}{\sqrt{1+|x|^2}}$$

はキリングスピノールになる．実際，キリングスピノールになることはsection 5.2.4でみた．また，この空間は球面から一点を除いたものであり完備ではない．

5.2.9 キリングスピノールの一般化

ここでは，キリングスピノールの方程式を一般化した方程式

$$\nabla_X + \frac{f}{n} X \cdot \phi = 0, \quad f \in C^\infty(M, \mathbb{C})$$

を考える．

Proposition 5.32 (Lichnerowicz). 連結スピン多様体 M で $\dim M \geq 3$ とする．このとき，f を複素数値関数で $Re(f) \not\equiv 0$ とする．このとき，

$$\nabla_X \phi + \frac{f}{n} X\phi = 0$$

を満たすスピノールが存在するなら，f は実定数であり，ϕ はキリングスピノールになる．

Proof. まず，$D\phi = \sum e_i \nabla_{e_i} \phi = f\phi$ となるので，

$$\nabla_X \phi + \frac{1}{n} XD\phi = -\frac{f}{n} X\phi + \frac{f}{n} X\phi = 0$$

となるので，ϕ はツイスタースピノールである．よって，($n \geq 3$ なので)

$$\frac{n}{2} K(X)\phi = \nabla_X(D\phi) = (Xf)\phi - \frac{f^2}{n} X \cdot \phi \tag{5.6}$$

を満たす．f を実部と虚部にわけて，$f = a + ib$ と書けば，

$$0 = \Re\langle \frac{n}{2} K(X)\phi, \phi\rangle = \Re\langle (Xf)\phi, \phi\rangle - \Re\langle \frac{f^2}{n} X \cdot \phi, \phi\rangle = (Xa)|\phi|^2 - \frac{2ab}{n} \langle iX\phi, \phi\rangle$$

を得る．さらに，(5.6) より．

$$\begin{aligned}
&\sum_i (e_i f) e_i \phi + (f^2 - \frac{n\kappa}{4(n-1)})\phi = \mathrm{grad}(f)\phi + (f^2 - \frac{n\kappa}{4(n-1)})\phi = 0 \\
&\sum_i (e_i f) e_j e_i \phi + (f^2 - \frac{n\kappa}{4(n-1)}) e_j \phi = 0 \\
&-(e_j f)\phi + (f^2 - \frac{n\kappa}{4(n-1)}) e_j \phi - \frac{1}{2} \sum_i (e_i f)(e_i e_j - e_j e_i)\phi = 0
\end{aligned}$$

となるので，

$$\begin{aligned}0 =&\Re\langle(e_jf)\phi,\phi\rangle-\Re\langle(f^2-\frac{n\kappa}{4(n-1)})e_j\phi,\phi\rangle+\Re\langle\frac{1}{2}\sum_i(e_if)(e_ie_j-e_je_i)\phi,\phi\rangle\\ =&(e_ja)|\phi|^2-2ab\langle ie_j\phi,\phi\rangle+\frac{1}{2}i\sum_i(e_ib)\langle(e_ie_j-e_je_i)\phi,\phi\rangle\\ =&(1-n)(e_ja)|\phi|^2+\frac{1}{2}i\sum_i(e_ib)\langle(e_ie_j-e_je_i)\phi,\phi\rangle\end{aligned}$$

を得る．(e_jb) をかけて，j について和ととれば，第二項は i,j について交代なので，

$$(1-n)\sum_j\langle e_ja,e_jb\rangle|\phi|^2=(1-n)g(\mathrm{grad}(a),\mathrm{grad}(b))|\phi|^2=0$$

を得る．よって，ϕ の零点は孤立点であったので，

$$g(\mathrm{grad}(a),\mathrm{grad}(b))\equiv 0$$

をえる．

さて，

$$\nabla_X\Re\langle D\phi,\phi\rangle=\Re\langle\nabla_X(D\phi),\phi\rangle+\Re\langle D\phi,\nabla_X\phi\rangle=0+\Re\langle D\phi,\frac{1}{n}XD\phi\rangle=0$$

となるので．$\Re\langle D\phi,\phi\rangle=a|\phi|^2$ は定数である．$a|\phi|^2=0$ とすると，ϕ のゼロ点は孤立点であったので，$a=0$ となり，$\Re(f)=a\not\equiv 0$ に矛盾．よって，$a|\phi|^2$ は零でない定数である．よって，任意の点で $a\neq 0$, $|\phi^2|\neq 0$ を得る．また，$a|\phi|^2$ が定数なので，$|\phi|^2\mathrm{grad}(a)+a\mathrm{grad}(|\phi|^2)=0$ を得る．よって，

$$0=g(|\phi|^2\mathrm{grad}(a)+a\mathrm{grad}(|\phi|^2),\mathrm{grad}(b))=ag(\mathrm{grad}(|\phi|^2),\mathrm{grad}(b))$$

となり，$g(\mathrm{grad}|\phi|^2,\mathrm{grad}b)=0$ を得る．そこで，

$$g(\mathrm{grad}|\phi|^2,\mathrm{grad}b)=\sum(e_i|\phi|^2)e_ib=\frac{2i}{n}\sum(e_ib)b\langle e_i\cdot\phi,\phi\rangle$$

となるので，

$$b\langle\mathrm{grad}(b)\phi,\phi\rangle\equiv 0$$

を得る．

さて，$\mathrm{grad}(f)\phi+(f^2-\frac{n\kappa}{4(n-1)})\phi=0$ と $b\phi$ の内積をとれば，

$$0=b\langle(\mathrm{grad}a+i\mathrm{grad}b)\phi,\phi\rangle+b(f^2-\frac{n\kappa}{4(n-1)})|\phi|^2=b\langle(\mathrm{grad}a)\phi,\phi\rangle+(f^2-\frac{n\kappa}{4(n-1)})|\phi|^2$$

となるので，実部をとれば，

$$b(a^2-b^2-\frac{n\kappa}{4(n-1)})=0$$

を得る．

$$U = \{x \in M \mid a^2 - b^2 - \frac{n\kappa}{4(n-1)} \neq 0\}$$

とすれば，U は開集合であり，U 上では $b = 0$ である．$(Xa)|\phi|^2 - \frac{2ab}{n}\langle iX\phi, \phi\rangle = 0$ を使えば，U 上で a は定数である．よって，$\phi|_U$ は実キリングスピノールである．そこで，$\kappa = 4n(n-1)\mu^2 = \frac{4(n-1)}{n}(a^2 - b^2)$ となり．U の定義に矛盾する．以上から，

$$a^2 - b^2 - \frac{n\kappa}{4(n-1)} \equiv 0 \quad \text{on } M$$

となる．

次に，

$$(1-n)(e_j a)|\phi|^2 + \frac{1}{2} i \sum_i (e_i b)\langle (e_i e_j - e_j e_i)\phi, \phi\rangle$$

に $e_j a$ をかけて和をとり，$g(\mathrm{grad}(a), \mathrm{grad}(b)) = 0$ を使えば，

$$(1-n)|\mathrm{grad} a|^2|\phi|^2 + \Re\langle i\mathrm{grad}(b)\mathrm{grad}(a)\phi, \phi\rangle = 0$$

を得る．$\mathrm{grad}(f)\phi + (f^2 - \frac{n\kappa}{4(n-1)})\phi = 0$ に $i\mathrm{grad}(b)$ をかければ，

$$i\mathrm{grad}(a)\mathrm{grad}(b)\phi + |\mathrm{grad}(b)|^2\phi + (f^2 - \frac{n\kappa}{4(n-1)})i\mathrm{grad}(b)\phi = 0$$

この式と ϕ の内積をとり，実部をとれば，

$$\begin{aligned}
0 &= \Re\langle i\mathrm{grad}(b)\mathrm{grad}(a)\phi, \phi\rangle + |\mathrm{grad} b|^2|\phi|^2 + (a^2 - b^2 - \frac{n\kappa}{4(n-1)})\langle i\mathrm{grad} b\phi, \phi\rangle \\
&= \Re\langle i\mathrm{grad}(b)\mathrm{grad}(a)\phi, \phi\rangle + |\mathrm{grad} b|^2|\phi|^2 \\
&= ((n-1)|\mathrm{grad} a|^2 + |\mathrm{grad} b|^2)|\phi|^2
\end{aligned}$$

となる．よって，$\mathrm{grad} a = 0 = \mathrm{grad} b$ となるので，f は定数であり，ϕ はキリングスピノールである．キリング数は実数または純虚数であったので，$\Re f = a \neq 0$ としているので，$b = 0$ となる． ■

5.2.10 4次元スピン多様体上ツイスタースピノール

4次元スピン多様体上にツイスタースピノールが存在した場合を考える．4次元なら 2-form の空間は $\Lambda^2 = \Lambda^2_+ \oplus \Lambda^2_-$ と分解し，スピノール空間も $W_4 = W_4^+ \oplus W_4^-$ と分解する．この分解は $Spin(4) = SU(2) \times SU(2) = Sp(1) \times Sp(1)$ に対応している．

Lemma 5.33. $\eta^\pm \in \Lambda^2_\pm$ とする．また $\phi_\pm \in W_4^\pm \simeq \mathbb{C}^2$ をスピノールとする．

1. $\eta^\mp\phi_\pm = 0$ である．

2. $\phi_\pm \neq 0$ として $\eta^\pm \phi_\pm = 0$ なら $\eta^\pm = 0$ となる．

Proof. $\mathfrak{spin}(4) = \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$ の分解が $\Lambda^2 = \Lambda^2_+ \oplus \Lambda^2_-$ の分解に対応している．また $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$ の各成分の自然表現がスピノール表現 $W_4^\pm$ である．つまり，Λ^2 のスピノール空間への作用は $\mathfrak{spin}(4)$ の作用そのものである．よって $\eta^\pm \phi_\mp = 0$ は明らかである．また $\eta^+ \phi_+ = 0$ であるとする．自然表現なので $\mathfrak{su}(2)$ の基底の行列表示はパウリ行列である．よって $\eta^+ = \sum X_i \sigma_i$ とすれば $\eta^+ \eta^+ \phi_+ = (\sum X_i^2)\phi_+$ となる．よって $\eta^+ = 0$ が証明できる． ■

Proposition 5.34. 4 **次元スピン**多様体 M 上に**ツイスタースピノール** $\phi_+ \in \Gamma(\mathbf{S}^+)$ **(*resp.* $\phi_- \in \Gamma(\mathbf{S}^-)$) が存在**していたとする．このとき M は**反自己双対**多様体である（*resp.* 自己双対多様体）．ここで反自己双対多様体とは $W^+ = 0$ となる多様体である．

Proof. ツイスタースピノール ϕ_+ が存在したとする．このとき $W(X,Y) \cdot \phi_+ = 0$ となる．よって，

$$0 = W(X,Y)\phi_+ = W^+(X,Y)\phi_+ + W^-(X,Y)\phi_+ = W^+(X,Y)\phi_+$$

となる．$\phi_+(x) \neq 0$ となる点では $W^+(X,Y) = 0$ を得る．しかし，ツイスタースピノールのゼロ点は孤立点であったので，M 上で $W^+(X,Y) = 0$ となる．つまり反自己双対多様体である． ■

次は，ツイスター理論（Atiyah-Hitchi-Singer の論文 [1]）における重要な定理である．

Theorem 5.35. M を向きつきリーマン多様体とする．このとき $\mathbf{S}^-$ のファイバーを射影化した空間を $P(\mathbf{S}^-)$ とする．これを**ツイスター空間**とよぶ．このとき $P(\mathbf{S}^-)$ には，自然に概複素構造が存在する．さらに，概複素構造が可積分であるための必要十分条件は $W^- = 0$（*self-dual* 多様体）である．

上の定理の証明は Atiyah-Hitchin-Singer の論文 [1] や Besse の本 [6] を参照．また，$\mathbf{S}^-$ はスピン多様体でないと定義できないが，射影化した $P(\mathbf{S}^-)$ は向きつきリーマン多様体で定義できることに注意.

Corollary 5.36. 4 次元スピン多様体上にツイスタースピノール $\phi_- \in \Gamma(\mathbf{S}^-)$ が存在したとすれば，ツイスター空間 $P(\mathbf{S}^-)$ は複素多様体である．

Remark 5.15. ペンローズ変換により，ツイスタースピノールはツイスター空間上のある正則ベクトル束の正則切断になる．

5.3 キリングスピノール再論

ツイスタースピノールの考察を参考にして，キリングスピノールについて議論していこう．

5.3.1 4次元スピン多様体上キリングスピノール

２，３次元の場合にキリングスピノールが存在した場合には，定曲率空間になることはすでに述べた．そこで４次元の場合を考えよう．

まずはキリング数が零でないキリングスピノールを持つ場合を考える．

Proposition 5.37. M を４次元スピン多様体で**キリング数がゼロでないキリングスピノールがあるとする．このとき** X **は定曲率空間**である．特に，**４次元スピン多様体が実キリングスピノールを持つなら，標準球面**（半径は $\frac{1}{2|\mu|}$）である．

Proof. キリングスピノール ψ を $\psi^+ + \psi^-$ とわける. よって

$$\nabla_X \psi^+ = \mu X \psi^-, \quad \nabla_X \psi^- = \mu X \psi^+$$

そして，

$$Z_\psi = \{m \in M | \psi^+(m) = 0, \text{ or } \psi^-(m) = 0\}$$

とする．このゼロ点集合は内点のない閉集合であり，$M \setminus Z_\psi$ は M の稠密な開集合であることを証明する（つまり Z_ψ は次元が落ちる）．Z_ψ が内点をもつとする．ある開集合 $U \subset Z_\psi \subset M$ をとれる. そして $\psi^+|_U = 0$ としてよい. このときキリング数がゼロでないので $\psi^-|_U = 0$ となり $\psi|_U = 0$ となる．これはキリングスピノールに零点がないことに矛盾.（これは任意の偶数次元でよい. ４次元の性質は用いていない）.

さて，キリングスピノールはツイスタースピノールであったので，

$$W(X,Y)\psi^+ = 0, \quad W(X,Y)\psi^- = 0$$

となる，４次元ツイスタースピノールの場合と同様にすれば，$M \setminus Z_\psi$ 上で $W^\pm = 0$ を得る．よって，M 上で $W = 0$ を得る．また，M はアインシュタイン空間でもあったので，M は定曲率空間である．

また，実キリングスピノールをもつ場合は，正の定曲率空間である．偶数次元の正の定曲率空間は球面が実射影空間であった．しかし，4次元実射影空間はスピン多様体ではない（向き付けも無理）なので，M は球面になる． ■

5.3.2 4次元多様体上の平行スピノール

次にキリング数が零の場合を考える．

Proposition 5.38. ４次元スピン多様体が**平行スピノール** $\phi_+ \in \Gamma(\mathbf{S}^+)$ **を持つとすると．そのホロノミー群は** $Sp(1) = SU(2)$ **に含まれる**．つまり，**超ケーラー多様体**である．また，このとき独立な平行スピノールの次元は２以上である．独立な平行スピノールが３つ以上あれば M は平坦になる．

Proof. スピノール表現は $Spin(4) = SU(2) \times SU(2)$ の表現であり，$\mathbf{S}^+$ に対応する表現は第一成分の $SU(2)$ の自然表現である．平行スピノール ϕ の存在と，ある点 x でのホロノミー群に対し不変スピノール $\phi(x)$ が存在することは同値であった．そこで $H \subset Spin(4)$ が不変スピノール $\phi(x)$ をもつとする．$\phi(x)$ の張る一次元部分空間 V を考えると V の任意の元は固定点である．そこでスピノール空間 $\mathbb{C}^2 = W_4^+$ を射影化した $\mathbb{C}P^1$ に $SU(2)$ が推移的に作用していることを考えれば，不変ベクトル $\phi(x)$ が入る V として $(1,0)$ ベクトルの張る空間としてよい．つまり $\phi(x) = (1,0)$ と仮定してもよい．そこで

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とすれば，$a = 1, b = 0$ である．つまり $H \subset SU(2) \times \mathrm{id} \subset Spin(4)$ となる．命題 3.1 により，リーマンホロノミー群も $SU(2) = Sp(1)$ となることがわかる．よって M は超ケーラー多様体である．このとき，不変ベクトル $(0,1)$ に対応する平行スピノールも存在するので，平行スピノールは 2 次元以上である．また，3 つ以上平行スピノールがある場合には，平行スピノール $\phi_- \in \Gamma(\mathbf{S}^-)$ が存在することを意味する．同様の議論により，ホロノミー群は id となり平坦であることがわかる． ■

Remark 5.16. 4 次元リッチ平坦ケーラー多様体なら，制限ホロノミー群 $Hol^0(M)$ は $Hol^0(M) \subset SU(2) = Sp(1)$ となる．しかし，必ずしもホロノミー群 $Hol(M)$ は $Hol(M) \subset SU(2)$ とはならない．つまり $SU(2) \not\subset G \not\subset U(2)$ となる G にホロノミー群が含まれる可能性がある．例えば Enriques 曲面は制限ホロノミーは $Sp(1) = SU(2)$ となるが，ホロノミー群は $Sp(1) \rtimes_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}_4 \subset U(2)$ である．[[6] page 400]．つまり局所超ケーラー多様体であるが超ケーラー多様体ではない．

コンパクト 4 次元スピン多様体で平行スピノールをもつ多様体は完全に分類できる．しかし，いろいろと大道具が必要なので，定義と結果だけを述べることにする．

Definition 5.3. $K3$ **曲面**とはコンパクト複素曲面で $h^{1,0}(M) = 0$ かつ標準束 K が（正則）自明であるもの．

Example 5.7. $\mathbb{C}P^3$ 内の超曲面

$$S = \{[z_0, z_1, z_2, z_3] \in \mathbb{C}P^3 | z_0^4 + z_1^4 + z_2^4 + z_3^4 = 0\}$$

は $K3$ 曲面である．

$K3$ 曲面に対しては複素曲面論において様々な結果が知られている．結果だけ述べると

1. （位相的な結果）$K3$ 曲面は単連結である．またベッチ数は $b_2 = 22$, $b_2^+ = 3$, $b_2^- = 19$．よって符号数 $\sigma(M) = -16$, オイラー数 $\chi(M) = 24$.

2. （複素幾何的な結果）$K3$ 曲面にはケーラー計量が入る．また $h^{2,0} = h^{0,2} = 1$, $h^{1,1} = 20$.

3. 微分位相的な結果：すべての $K3$ 曲面は微分同相である．

4. Kummer 曲面という代数多様体でない $K3$ 曲面もある．

5. $K3$ 曲面にはリーマンホロノミー群が $Sp(1)$ に一致するケーラー計量が唯一つ入る．逆に，コンパクト４次元リーマン多様体でホロノミー群が $Sp(1)$ に**一致**するものがあれば，複素構造 I が存在して，(M, I) が $K3$ 曲面となるものが存在する．

以上の結果に対する証明などは複素曲面の本を参照.

Corollary 5.39. **コンパクト４次元スピン多様体 M が平行スピノールを持つなら，M は $K3$ 曲面か平坦**である．

Proof. M を４次元コンパクトスピン多様体で平行スピノール ϕ_+ を持つとする．このとき超ケーラー多様体であり，ホロノミー群は $Sp(1)$ に含まれる．M はコンパクトリッチ平坦であるのでチーガー・グロモールの定理からリーマン有限被覆 $T^k \times N$ で N がコンパクト単連結リッチ平坦であるものが存在する．M はケーラー多様体なので $T^k \times N$ もケーラーであり，T^k, N もケーラーになる．つまり，M のリーマン有限被覆 $T^k \times N$ で N がコンパクト単連結リッチ平坦ケーラーとなるものが存在する．また N のホロノミー群は $Sp(1)$ に含まれるが，ドラーム分解定理を使うと，N はいくつかの「コンパクト単連結既約対称空間」といくつかの「Berger のリストのコンパクト単連結リーマン多様体」の積である．単連結既約対称空間でリッチ平坦なものはユークリッド空間であり，コンパクトでない．そこで N は Berger のリストにあるコンパクト単連結リーマン多様体のいくつかの積である．リッチ平坦で，ホロノミー群が $Sp(1)$ に含まれるものは $Sp(1)$ または id しかない．$Hol(N) = \mathrm{id}$ はありえないので $Hol(N) = Sp(1)$ となる．よって M の有限被覆は $K3$ 曲面または T^4 を有限群で割ったもの（平坦）である．

さて，M は４次元スピン多様体であるので，Rochlin の定理から $\hat{A}(M) = -\frac{1}{8}\sigma(M)$ は偶数．つまり符号数 $\sigma(M)$ は 16 の倍数である．

M の有限被覆の $K3$ 曲面を $\tilde{M}$ とする．M は $\tilde{M}$ を等長有限群 G の作用で割ったものである．$\tilde{M}$ のオイラー数は 24 で符号数は -16 であった．また M のオイラー数と符号数は $\#G$ で割ったものである（例えば指数定理から $\mathrm{ind}\tilde{D} = \#G \times \mathrm{ind}D$ がわかるので）．そこで M の符号数が 16 の倍数となるのは G の位数が 1 のとき，つまり $\tilde{M} = M$ のときである．

以上から M は $K3$ 曲面または M は平坦である． ■

5.3.3 リーマン多様体としての局所既約性

Proposition 5.40. **キリング数がゼロでない**キリングスピノールを持つスピン多様体はリーマン多様体として**局所的に既約**である.

Proof. キリングスピノール ϕ に対して,

$$R_\Delta(X,Y)\phi = \mu^2(XY-YX)\phi = \frac{\kappa}{4n(n-1)}(XY-YX)\phi$$

であった．よって,

$$(\frac{1}{2}R(X,Y)\cdot - \frac{\kappa}{4n(n-1)}(XY-YX))\phi = 0$$

となる．M が**局所的に**リーマン積とする $U = U_1 \times U_2$. このとき X, Y をそれぞれ U_1, U_2 に接する接ベクトルとすれば，$R(X,Y) = 0$ かつ $g(X,Y) = 0$ となるので,

$$\kappa XY\psi = 0$$

を得る．キリング数がゼロでないのでスカラー曲率もゼロでない． $XXY\psi = |X|^2Y\psi = 0$ であり, $Y\psi = 0$. よって $YY\psi = |Y|^2\psi = 0$ であるので $\psi = 0$（on U）となりキリングスピノールに零点がないことに矛盾. ■

Proposition 5.41. **キリング数がゼロでないキリングスピノールを持つスピン局所対称空間は定曲率空間である**.

Proof. 局所対称とは $\nabla R = 0$ となるリーマン多様体であるので，$\nabla W = 0$ を満たす，キリングスピノール ϕ に対して，$D\phi = -n\mu\phi$ となるのであった．キリング数 μ は零でないとしているので，ϕ にゼロ点がないことから，$D\phi$ にもゼロ点がない．よって，系 5.25 を使って $W = 0$ がわかる．M はアインシュタインであったので，定曲率空間となる. ■

Proposition 5.42. **キリング数がゼロでないキリングスピノールを持つ単連結スピン対称空間は球面 S^n か双曲空間 H^n となる**.

Proof. 単連結なら局所対称空間は対称空間のことである．どちらにしろ，単連結定曲率空間になる．よって，$\mathbb{R}^n$, S^n, H^n のいずれかであるが，$\mathbb{R}^n$ 上にはキリングスピノールは存在しなかったので，除ける. ■

5.3.4 平行微分形式の非存在

キリングスピノール ϕ が存在したときに，調和微分形式や平行微分形式にも制限がつくことを見ていこう．調和微分形式とは $(dd^* + d^*d)w = 0$ となるものであり，平行微分形式とは $\nabla w = 0$ となるものである．$p = 0$ の場合，つまり関数の場合には，平行なものは定数関数のみである．また $p = n$ の場合は，体積要素の定数倍である．特に $p = n$ の場合は $\Lambda^n(M)$ が自明束になることを意味する．つまり向き付け可能ということである．平行移動のところで見たように，平行微分形式があるなら，ホロノミー群の小さくなることを意味するのであった．

Proposition 5.43. *M を連結スピン多様体で***キリング数が零でないキリングスピノールを持つとする．このとき，**$p \neq 0, n$ **とすれば，平行な** p-*form* **は存在しない**. また w を調和 p-*form* として，M をコンパクトとすれば，$w \cdot \phi = 0$ である．

Proof. Remark 4.5 で述べたように，w を p-form とすれば，

$$D(w\phi) = (-1)^p wD\phi + ((d + d^*)w) \cdot \phi - 2\sum(\iota(e_i)w)\nabla_{e_i}\phi$$

が成立していた．そこで ϕ をキリングスピノール，w を調和形式とすれば，

$$D(w\phi) = (-1)^{k+1} n\mu\phi - 2\mu\sum(\iota(e_i)w) \cdot e_i \cdot \phi = (-1)^{k+1}\mu(n - 2p)w\phi$$

となる．よって $D^2(w\phi) = \mu^2(n-2p)^2 w\phi$ を得る．つまり，$w\phi$ が固有スピノールになる．さて，M がコンパクトなら，D^2 の最小固有値は $n^2\mu^2$ であったので，$p \neq 0, n$ なら $w\phi = 0$ を得る．

次に w が平行 p-form であるとする．これはもちろん調和 p-from であるので，$D^2(w\phi) = \mu^2(n-2p)^2 w\phi$ が成立する．また，$D^2 = \nabla^*\nabla + \kappa/4 = \nabla^*\nabla + n(n-1)\mu^2$ により，

$$\nabla^*\nabla(w\phi) = w\nabla^*\nabla\phi = w(D^2 - \kappa/4)\phi = \mu^2(n^2 - n(n-1))w\phi$$
$$\nabla^*\nabla(w\phi) = (D^2 - n(n-1)\mu^2)(w\phi) = \mu^2((n-2p)^2 - n(n-1))w\phi$$

を得る．よって，$p \neq 0, n$ なら $w\phi = 0$ が成立する（非コンパクトでもよい）．そこで，

$$0 = \nabla_X(w\phi) = \mu wX\phi$$

となるので

$$\begin{aligned} 0 = wX\phi &= (-1)^p((w \wedge X) \cdot \phi + (\iota(X)w) \cdot \phi) = (-1)^p(X \cdot w \cdot \phi + 2(\iota(X)w) \cdot \phi) \\ &= 2(-1)^p(\iota(X)w)\phi \end{aligned}$$

となるので，$(\iota(X)w) \cdot \phi = 0$ となる．さらに，

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_{X_2}((\iota(X_1)w) \cdot \phi) = (\nabla_{X_2}\iota(X_1)w)\phi + \iota(X_1)w\nabla_{X_2}\phi \\ &= \iota(\nabla_{X_2}X_1)w\phi + \mu\iota(X_1)w \cdot X_2\phi = \mu\iota(X_1)wX_2\phi \\ &= 2(-1)^{p-1}\mu(\iota(X_2)\iota(X_1)w)\phi \end{aligned}$$

となる．よって，$(\iota(X_2)\iota(X_1)w)\phi = 0$ となる．以下これを繰り返すと，

$$w(X_1, \cdots, X_p)\phi = 0$$

となるので，キリングスピノールにゼロ点はないので，$w = 0$ となる． ■

Corollary 5.44. **キリング数が零でないキリングスピノールが入るスピン多様体には，ケーラー構造は入らない．また四元数ケーラー構造，G_2 構造，$Spin(7)$ 構造は入らない**.

Proof. ケーラー多様体には平行 2-form であるケーラー形式が存在する．四元数ケーラーの場合にも Kraines 形式という平行 4-form が存在．G_2, $Spin(7)$ は説明してないが，それらにも平行な微分形式がはいる． ■

単連結スピン多様体 M でキリング数が零でないキリングスピノールが入る場合を考える．まず，局所既約であったので，単連結から既約になる．また，対称空間とすると M は H^n または S^n となる．そこで，$M \neq S^n, H^n$ とすれば，対称空間でない既約単連結リーマン多様体のホロノミー分類を使うと，ホロノミー群は $SO(n), U(n/2), SU(n/2), Sp(n/4), Sp(n/4)Sp(1), G_2, Spin(7)$ のいずれかである．上の系を使えば，$Hol(M) = SO(n)$ となることがわかる．(S^n, H^n のホロノミー群も $SO(n)$ である）.

Corollary 5.45. **単連結スピン多様体上にキリング数が零でないキリングスピノールが入るなら，既約であり，リーマンホロノミー群は** $SO(n)$ **に一致**する.

5.4 低次元の平行スピノール

スピン多様体の次元が４以下の場合の平行スピノールについては，すでに述べた.

5.4.1 5 次元スピン多様体上の平行スピノール

５次元スピン多様体で平行スピノールを持つものを考える．$Spin(5) \simeq Sp(2)$ であり，スピノール表現は $Sp(2)$ の $\mathbb{H}^2 \simeq \mathbb{C}^4$ への自然表現であった．さらに，次の補題から $S^7 \subset \mathbb{H}^2$ に $Sp(2)$ は推移的に作用する.

Lemma 5.46. $\mathbb{H}^n$ への $Sp(n)$ の自然表現を考える．$S^{4n-1} \subset \mathbb{H}^n$ へ $Sp(n)$ へ作用し，$Sp(n)/Sp(n-1) \simeq S^{4n-1}$ である.

Proof. $S^{4n-1} \subset \mathbb{H}^n$ は

$$S^{4n-1} := \{q \in \mathbb{H}^n | |q|^2 = \sum q_i \bar{q}_i = 1\}$$

で定義される．ある点 q から $\mathbb{H}^n$ の正規直交基底をつくって並べた行列 A は $Sp(n)$ に入る．よって $Ae_1 = q$ となる．つまり推移的に作用する．イソトロピー群が $Sp(n-1)$ になることもすぐわかる．

注意：四元数ベクトル空間の場合には

$$B(p,q) = p_1\bar{q}_1 + \cdots + p_n\bar{q}_n \in \mathbb{H}$$

として内積を入れる．この内積を保つ線形同型全体の群が $Sp(n)$ である．(例えば，横田「群と位相」などに詳しく載っている)． ■

Remark 5.17. 同様にして $\mathbb{C}^n$ への $SU(n)$ または $U(n)$ の作用を考えると，$S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ へ推移的に作用し $SU(n)/SU(n-1) \simeq U(n)/U(n-1) \simeq S^{2n-1}$ を得る．$\mathbb{R}^n$ で考えたら，$SO(n)/SO(n-1) \simeq O(n)/O(n-1) \simeq Spin(n)/Spin(n-1) \simeq S^{n-1}$ となる．

さて $Sp(2)$ が $S^7 \subset \mathbb{H}^2$ に推移的に作用するので，平行スピノールに対して，不変ベクトルは $(1,0,0,0) \in S^7 \subset \mathbb{C}^4 \simeq \mathbb{H}^2$ としてよい．そしてこのイソトロピー群は $Sp(1)$ である．また，スピン群の作用と可換な四元数構造 $\mathfrak{J}$ が存在するので，ϕ を平行スピノールとすれば，$\mathfrak{J}\phi$ も平行スピノールである．よって

Proposition 5.47. 5 次元スピン多様体 M 上に，**平行スピノール ϕ が存在したとする．このとき，ホロノミー群は $Sp(1) \subset SO(5)$ に含まれる**．さらに，スピノール束上の四元数構造 $\mathfrak{J}$ を使って $\mathfrak{J}\phi$ は ϕ と独立な平行スピノールになる．

Remark 5.18. 上の $Sp(1) \subset Sp(2)$ の埋め込みによって，$Sp(2)$ の表現 $\mathbb{H}^2$ を $Sp(1)$ へ制限した場合には,「$\mathbb{H}$ という $Sp(1)$ の自然表現」と「複素 2 次元自明表現」の和に分解される．このことからも平行スピノールが二つ存在することがわかる．

この命題とドラーム分解を使えば，M は局所的に $\mathbb{R} \times N$（N は実 4 次元超ケーラー多様体 or 平坦）と分解できる．実際，コンパクト非平坦スピン多様体で平行スピノールをもつ多様体は S^1 上の $K3$ 曲面をファイバーとするファイバー束になる．

Proposition 5.48. (M,g) を 5 次元コンパクト非平坦スピン多様体で平行スピノールを持つとする．このとき M は S^1 上の $K3$ 曲面をファイバーとするファイバー束になる．

証明は Friedrich and Kath 「Compact 5-dimesional Riemannian manifold with Parallel spinors」Math. Nachr. 147 (1990) 161-165 をみよ．または [5] を見よ．(証明は難しくはない)．

5.4.2 6 次元スピン多様体上の平行スピノール

6 次元スピン多様体上で平行スピノールがある場合を考える．偶数次元なので $\phi \in \Gamma(\mathbf{S}^+)$ が零でない平行スピノールする．$\phi \in \Gamma(\mathbf{S}^-)$ なら向きを変えればよい．

平行スピノールが一つ存在した場合に，ホロノミー群は $Spin(6)$ のスピノール表現のある点のイソトロピー群に含まれるのであった．$Spin(6)=SU(4)$ であり，スピノール表現 Δ_6^+ は $\mathbb{C}^4$ への自然表現である（$\Delta_6^- = (\Delta_6^+)^*$ であったので，Δ_6^- は自然表現の共役表現である）.

Proof. スピノール表現 $\Delta_6^\pm$ の次元は複素４次元である．一方 $SU(4)$ の複素４次元表現はこれらしかない．または具体的にクリフォード代数内で同型をつくって証明しても良い． ■

そこで $SU(4)$ の自然表現を考える．４次元の場合と同様にして $\mathbb{C}P^3$ に $SU(4)$ は推移的に作用していることから，不変ベクトルは $(1,0,0,0)\in\mathbb{C}^4$ としてよい．このとき，イソトロピー群は $SU(3)$ である．よって命題 3.1 より平行スピノールが存在すれば $\tilde{H}\subset SU(3)$ であり，リーマンホロノミー群も $H\subset SU(3)$ となる．特に，リッチ平坦ケーラー多様体である．ホロノミー群が $SU(3)$ に入る場合にはスピノール表現は $\sum_{p=0}^3\Lambda^{0,p}$ であり，$\Lambda^{0,0}$, $\Lambda^{0,3}$ は自明表現である．そして $\Lambda^{0,0}(M)\subset\mathbf{S}^+$, $\Lambda^{0,3}\subset\mathbf{S}^-$ である．

Proposition 5.49. ６次元スピン多様体が**平行スピノールをもつなら，リッチ平坦ケーラー多様体でありホロノミー群が** $SU(3)\subset SO(6)$ **に入る**．また平行スピノールは２個以上存在して，そのうち一つは $\mathbf{S}^+$ の切断で, 一つは $\mathbf{S}^-$ の切断である．

さて $\phi_1\in\Gamma(\mathbf{S}^+)$ を平行スピノールとする．これは $\phi_1\in\Lambda^{0,0}(M)$ に入るとしてよい．この ϕ_1 と独立な平行スピノール $\phi_2\in\Gamma(\mathbf{S}^+)$ が存在したなら，それは $\Lambda^{0,2}(M)$ の切断である．$(\Lambda^{0,2}(M))^*\simeq\Lambda^{1,0}(M)$ であるので $\Lambda^{0,2}(M)\simeq T^{1,0}(M)$ となり，これは $SU(3)$ の自然表現である．$SU(3)$ は $\mathbb{C}P^2$ の推移的に作用しているので ϕ_2 に対応する不変ベクトルは $(1,0,0)\in\mathbb{C}^3$ としてよい．そこで，このイソトロピー群を計算すると $SU(2)\simeq Sp(1)$ となる．よって $\phi_1,\phi_2\in\Gamma(\mathbf{S}^+)$ という独立な平行スピノールがあれば，ホロノミー群 H は $H\subset SU(2)$ となる．またこのとき．平行スピノール $\phi_1',\phi_2'\in\Gamma(\mathbf{S}^-)$ の存在がわかる．

5.4.3 高次元平行スピノール

上で見たように，６次元以下の場合にはスピノール表現空間の射影化した空間にスピン群が推移的に作用している．これは特殊な状況である．７次元，８次元でも同様のことが成立する（G_2, $Spin(7)$ の話なので，詳しくことは省略する）.

７次元の場合を考える．$Spin(7)$ のスピノール表現空間は $W_7\simeq\mathbb{C}^8$ である．この空間には，クリフォード代数の作用と可換な実構造が入った．そこで，$Spin(7)$ の実スピノール表現 $\mathbb{R}^8$ を考える．このとき，$S^7\subset\mathbb{R}^8$ に $Spin(7)$ は推移的に作用して，$S^7=Spin(7)/G_2$ であることがわかる（see [13]）．よって，平行スピノールを持つなら，$Hol(M)\subset G_2$ である．また．逆に $Hol(M)\subset G_2$ なら，標準的なスピン構造が入り，平行スピノールが存在することがわかる（つまり $G_2\subset Spin(7)$ となり，W_7 を G_2 へ制限したとき，自明表現が存在する）．よって，

Proposition 5.50. **7次元スピン多様体に平行スピノールが存在するなら，**$Hol(M) \subset G_2$ **である．つまり，**G_2 **多様体である．逆に** G_2 **多様体には平行スピノールが存在する**.

同様に，８次元の場合を考える．$Spin(8)$ のスピノール表現空間は $W_8^{\pm} \simeq \mathbb{C}^8$ であり，クリフォード作用と可換な実構造が入る，そこで，$Spin(8)$ の実スピノール表現 $\mathbb{R}^8$ を考える．このとき $S^7 \subset \mathbb{R}^8$ に $Spin(8)$ は推移的に作用し，$S^7 = Spin(8)/Spin(7)$ となることがわかる．よって，平行スピノールを持つなら $Hol(M) \subset Spin(7)$ となる．逆も成立する．

Proposition 5.51. **８次元スピン多様体上に平行スピノールが存在するなら，**$Hol(M) \subset Spin(7)$ **である．つまり** $Spin(7)$ **多様体である．逆に** $Spin(7)$ **多様体には平行スピノールが存在する．**

さらに，高次元の場合を考える．このときは，スピノール空間上のある点のスピン群による軌道は，点によって異なるので，そのイソトロピー群も異なってしまる．よって，上のような話ができるのは８次元までである．より高次元の場合は，既約リーマン多様体のホロノミー群と平行スピノールの関係を見ていくことになる．

Remark 5.19. ４，６次元と同様のことが起こるのは $2m$ 次元スピン多様体上で平行純スピノール（平行 pure spinor）というものが存在する場合である．この時，ホロノミー群が $SU(m)$ に含まれ，M はリッチ平坦ケーラー多様体になる．同様に５次元と同様なことが起こるのは $2m+1$ 次元スピン多様体上に平行純スピノールが存在するときで，このときホロノミー群も $SU(m)$ へ縮約し，局所的に $N \times \mathbb{R}$ と分解する（N はホロノミー群が $SU(m)$ になるもの）．これら純スピノールについては [13] を見よ．

6　展望

我々はキリングスピノールについて議論してきた．とりあえず，４次元以下の場合には，ほとんど上で述べたことで分類できたいってよい．それより高次元の場合を考える．

完備単連結スピン多様体でキリングスピノール（および平行スピノールでも）をもつものは分類されている．ここまで読んだ読者は，それらに関する論文は，それほど難しくないと思う．単連結を仮定しない場合には，完全に分類されているわけではない．単連結を仮定しない平行スピノールをもつ場合には [17] などがある．キリングスピノールについても [5] などに様々な結果が書いてある．

しかし，あまり細かく分類するのもどうかと思うので，とりあえず単連結な場合には（つまり局所的には），キリングスピノールをもつスピン多様体は分類されているので，それで良しとするのがよい.（まあ，これ以上やっても，面白くな

いってことです．もちろん，幾何構造に付随したキリングスピノールや，そのほかの一般化などは，面白いと思う）．

とりあえず，ここでは結果と概要を述べることにする．

6.1 平行スピノール

まず，平行スピノールをもつ場合を考える．平行スピノールを持つなら，リッチ平坦であったので，単連結既約リーマン対称空間はユークリッド空間である．それ以外の場合は Berger の分類に対応させれば次を得ることができる．

Theorem 6.1 ([16],[10]). M を完備単連結既約 n 次元スピン多様体とする．また平坦でないと仮定する．$N = \dim\ker\nabla$（平行スピノールの空間の次元）とする．$N > 0$ ならば，M は次のいずれかである．

1. $n = 2m$ で，$Hol(M) = SU(m)$．さらに，$N = 2$.
2. $n = 4k$ で，$Hol(M) = Sp(k)$．さらに，$N = k + 1$.
3. $n = 8$ で，$Hol(M) = Spin(7)$．さらに，$N = 1$.
4. $n = 7$ で，$Hol(M) = G_2$．さらに，$N = 1$.

逆に，ホロノミー群が上のいずれかに一致するなら，平行スピノールが存在し，N は上で与えられたものに一致する．

Proof. M は，平行スピノールをもつのでリッチ平坦である．また平坦でないとしているので対称空間であるユークリッド空間は外せる．そこで，Berger の分類でリッチ平坦なものは，ホロノミー群 $Hol(M)$ は $SU(m), Sp(k), Spin(7), G_2$ のいずれかに一致する．また，単連結を仮定していたので，スピン構造は唯一つであり，幾何構造と可換な標準的なものである．そこで，$Hol(M) \subset Spin(n)$ となり，スピノール表現を $Hol(M)$ へ制限したときに，自明表現が何次元あるか数える．$SU(m)$ と $Sp(k)$ の場合は「スピン幾何入門２」で述べたようにそれぞれ，2 次元, $m + 1$ 次元である．$Spin(7), G_2$ の場合も同様にして 1 次元自明表現が存在することがわかる．

逆に，M を完備単連結既約 n 次元スピン多様体でホロノミー群が上のいずれかに一致した場合には，平行スピノールの次元は上で与えたものに一致しなければならない．それ以上平行スピノールが合った場合には，ホロノミーが小さくなってしまうのである． ■

Remark 6.1. 上で与えた平行スピノールを使えば，幾何構造に付随した平行微分形式を作ることが可能である（作り方は Section 7.6 を参照．詳しくは [16]）．

6.2　実キリングスピノール

完備単連結スピン多様体上の実キリングスピノールの分類は [2] による．

6.2.1　変形接続

まずは，リー環レベルの話をする．$\mathfrak{sp}(n) \subset Cl_n$, $\mathbb{R}^n \subset Cl_n$ を足して，リー環 $\mathfrak{spin}(n) \oplus \mathbb{R}^n$ を考える．ここで，リー環の積は $[x, y] = xy - yx$ で入れている．このとき，環同型 $Cl_n \ni e_i \mapsto e_i e_{n+1} \in Cl^0_{n+1}$ を考慮すれば，

$$\mathfrak{spin}(n) \oplus \mathbb{R}^n \simeq \mathfrak{spin}(n+1)$$

となることがわかる．以上から，$\mathfrak{spin}(n+1) \subset Cl_n$ を得た．

Remark 6.2. 「スピン幾何入門１」のスピノール空間への内積を入れるときにも，この手法を使った．

クリフォード代数 Cl_n 内で指数写像をとれば,．リー群の単射準同形

$$\iota : \exp \mathfrak{spin}(n) = Spin(n) \to Spin(n+1) = \exp \mathfrak{spin}(n) \oplus \mathbb{R} \subset Cl_n$$

を得る．スピノール空間 W_n はクリフォード代数の表現であったので，$Spin(n+1) \subset Cl_n$ へ制限することで，W_n は $Spin(n+1)$ の表現空間と見なせる．実際，$Cl_n \simeq Cl^0_{n+1}$ を考慮すれば，n が偶数なら，$W_n \simeq W_{n+1}$ であり，n が奇数なら，$W_n \simeq W^+_{n+1}$ となる．これは，体積要素が $Cl_n \to Cl^0_{n+1}$ により，どのように移っているかを考えればよい．$n = 2m-1$ とすれば，

$$\begin{aligned}\omega_{2m-1} = i^{[\frac{n+1}{2}]} e_1 \cdots e_n \mapsto \\ i^{[\frac{n+1}{2}]} e_1 e_{n+1} \cdots e_n e_{n+1} = i^{[\frac{n+1}{2}]} (-1)^{n(n-1)/2} e_1 \cdots e_n e^n_{n+1} \\ i^m (-1)^{m+1} (-1)^{m-1} e_1 \cdots e_{2m-1} e_{2m} = i^m e_1 \cdots e_{2m} = \omega_{2m}\end{aligned}$$

となる．

M をスピン多様体として，主 $Spin(n)$ 束 $\mathbf{Spin}(M)$ を考える．また，被覆写像は $\Phi : \mathbf{Spin}(M) \to \mathbf{SO}(M)$ とする．この主束には，スピン接続 $A^{spin} = \Phi^* A_{LC}$ が入っていた．A^{spin} を使って，$\mathbf{Spin}(M)$ 上の $\mathfrak{spin}(n+1)$ 値 1-form を，

$$A := \Phi^* A_{LC} + a \Phi^* \Theta, \quad a \text{ は実定数}$$

として入れる．ここで，Θ はフレーム束上の標準形式である．

Definition 6.1. フレーム束 $\mathbf{SO}(M)$ の**標準形式** Θ とは，$\mathbf{SO}(M)$ 上の $\mathbb{R}^n$ 値 1-form であり，次で定義されるもの：$p \in \mathbf{SO}(M)$ は，$p : \mathbb{R}^n \to T_{\pi(p)}(M)$ を定めるので，$\Theta_p(X) := p^{-1}(d\pi(X))$（$\forall X \in T_p\mathbf{SO}(M)$）．

Lemma 6.2. 上で定めた接続 A は $Spin(n)$ 同変である．つまり，$(R_h^* A)_p = \mathrm{Ad}(h) A_p$ が成立する．

Proof. $\Phi^* A_{LC}$ はスピン接続なので，$Spin(n)$ 同変である．つまり，$(R_h^* \Phi^* A_{LC})_p = \mathrm{Ad}(h^{-1})(\Phi^* A_{LC})_p$ が成立する．一方，$\Phi(R_h(p)) = \Phi(ph) = \Phi(p)\mathrm{Ad}(h) = R_{\mathrm{Ad}(h)}\Phi(p)$ 及び $\pi(ph) = \pi(p)$ に注意すれば，

$$
\begin{aligned}
&(R_h^* \Phi^* \Theta)_p(X_p) = \Theta_{\Phi(ph)}(d\pi d\Phi dR_h X_p) = \Theta_{\Phi(p)\mathrm{Ad}(h)}(d\Phi dR_h X_p) \\
=&\mathrm{Ad}(h)^{-1}\Phi(p)^{-1}(d\pi dR_{\mathrm{Ad}(h)} d\Phi X_p) = \mathrm{Ad}(h)^{-1}\Phi(p)^{-1}(d\pi d\Phi X_p) = \mathrm{Ad}(h)^{-1}(\Phi^*\Theta)_p(X_p)
\end{aligned}
$$

となる．よって，

$$
(R_h^* A)_p = \mathrm{Ad}(h^{-1}) A_p
$$

を得る．この作用は $Spin(n)$ の $\mathfrak{spin}(n+1) = \mathfrak{spin}(n) \oplus \mathbb{R}^n$ への随伴作用と一致していることに注意する． ■

主 $Spin(n+1)$ 束 $\mathbf{Spin}_{n+1}(M) = \mathbf{Spin}(M) \times_\iota Spin(n+1)$ を考える．ここで，$\mathbf{Spin}(M) \ni p \to [p, 1] \in \mathbf{Spin}_{n+1}(M)$ で埋め込んでいる．先ほどの接続をここへ拡張する．まず，$p \in \mathbf{Spin}(M) \subset \mathbf{Spin}_{n+1}(M)$ 上では，水平方向 $H_p = \ker A_p$ がすでに定まっている．補題から，$H_{ph} = \ker A_{ph} = dR_h \ker A_p = dR_h H_p$ となる．そこで，任意の点 $[p, g] \in \mathbf{Spin}_{n+1}(M) = \mathbf{Spin}(M) \times_\iota Spin(M)$ 上で

$$
H_{[p,g]} := dR_g H_p = dR_g H_{[p,1]}
$$

と水平方向を定義する．このようにして，主 $Spin(n+1)$ 束 $\mathbf{Spin}_{n+1}(M)$ 上の接続が定まった．別の言い方をすれば，$A_{[p,g]} := \mathrm{Ad}(g^{-1}) A_p \circ dR_{g^{-1}}$ かつ $A(X^*) = X$（$\forall X \in \mathfrak{spin}(n+1)$）とすればよい．

Lemma 6.3. スピノール空間 W_n に対する同伴束 $\mathbf{Spin}_{n+1}(M) \times_\rho W_n$ 上で，上の接続から導かれる共変微分は，

$$
\tilde{\nabla}_X = d + \frac{1}{4} \sum g(\nabla_X e_i, e_j)[e_i, e_j] + aX\cdot
$$

となる．

Proof. $U \subset M$ として，U 上の正規直交フレーム $(e_1, \cdots, e_n)$ を選ぶ．これは局所切断 $e : U \to \mathbf{SO}(M)$ のことである．そして，$\Phi : \mathbf{Spin}(M) \to \mathbf{SO}(M)$ で対応する切断を f とする．この切断により $A^{spin} = \Phi^* A_{LC}$ を引き戻せば，U 上の接続 1 形式 $A_U^{spin} = \frac{1}{4} \sum g(\nabla_X e_i, e_j)[e_i, e_j]$ を得るのであった．そして，スピノールへ作用させるときには，

$$
\frac{1}{4} \sum g(\nabla_X e_i, e_j) \pi_\Delta([e_i, e_j])
$$

となる．そこで，$\Phi^*\Theta$ について同様のことを考える．標準形式 Θ は $T(M)\otimes T^*(M) = \mathrm{End}(TM)$ の恒等写像 id に対応するのであった．つまり $(e_1, \cdots, e_n)$ を局所フレームとすれば，$\sum e_i \otimes e_i^* = \sum g(e_i, \cdot)e_i$ である．そこで，

$$\Theta_U = \sum_i g(e_i, \cdot)e_i$$

となる．これをスピノール空間に作用させるのだが，$\mathbb{R}^n \subset \mathfrak{spin}(n+1)$ の部分に入っているので，

$$\sum_i g(e_i, X)e_i = X\cdot$$

となる． ■

Proposition 6.4. $\mathbf{Spin}(M) \times_\Delta W_n = \mathbf{Spin}_{n+1}(M) \times_\rho W_n$ 上のスピン接続 A^{spin} から導かれる共変微分を ∇ とすれば，接続 A からみちびかれる共変微分は

$$\tilde{\nabla}_X = \nabla_X + aX\cdot$$

となる．

主 $SO(n+1)$ 束 $\mathbf{SO}_{n+1}(M) = \mathbf{Spin}_{n+1}(M) \times_{\mathrm{Ad}} SO(n+1)$ を考える．ここで $[p, h] = [pg, \mathrm{Ad}(g^{-1}) \cdot h]$ としているが，$\mathrm{Ad}(g^{-1})h$ は $g^{-1}hg$ のことではなく，$\mathrm{Ad}(g^{-1}) \in SO(n+1)$ と見なして，積 $\mathrm{Ad}(g^{-1}) \cdot h$ を考えている．上で定義した接続 A を，$\mathbf{SO}_{n+1}(M)$ へ落としてみる．$\mathrm{Ad} : Spin(n+1) \to SO(n+1)$ の無限小写像 $\mathrm{Ad}_* : \mathfrak{spin}(n+1) \to \mathfrak{so}(n+1)$ を計算すればよい．同型 $Cl_n \to Cl^0_{n+1}$ を考慮すれば，

$$\mathfrak{spin}(n+1) \supset \mathbb{R}^n \ni e_i \to e_i e_{n+1} \to 2e_i \wedge e_{n+1} \in \mathfrak{so}(n+1)$$
$$\mathfrak{spin}(n+1) \supset \mathfrak{spin}(n) \ni e_i e_j \to e_i e_{n+1} e_j e_{n+1} = e_i e_j \to 2e_i \wedge e_j \in \mathfrak{so}(n) \subset \mathfrak{so}(n+1)$$

となるので，$\mathbf{SO}_{n+1}(M)$ 上の接続は

$$\begin{pmatrix} A_{LC} & -2a\Theta \\ 2a\Theta^t & 0 \end{pmatrix}$$

となる．また，自然に $\mathbf{SO}(M) \subset \mathbf{SO}_{n+1}(M)$ と埋め込め，$\mathbf{SO}_{n+1}(M) \times_\rho \mathbb{R}^{n+1} = TM \oplus (M \times \mathbb{R})$ となる．

Proof.

$$\begin{aligned} \mathbf{SO}(M) = \mathbf{Spin}(M) \times_{\mathrm{Ad}} SO(n) \ni [p, h] \\ \mapsto [[p, 1], h] \in \mathbf{SO}_{n+1}(M) = \mathbf{Spin}(M) \times_\iota Spin(n+1) \times_{\mathrm{Ad}} SO(n+1) \end{aligned}$$

は well-defined である．ただし，右辺の h は

$$\begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

のことである．また，$g \in Spin(n)$ とすれば，

$$\rho \mathrm{Ad}(\iota(g)) = \mathrm{Ad}(g) = \begin{pmatrix} \mathrm{Ad}(g) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であるので，

$$\begin{aligned} \mathbf{SO}_{n+1}(M) \times_\rho \mathbb{R}^{n+1} = &\mathbf{Spin}(M) \times_\iota Spin(n+1) \times_{\mathrm{Ad}} SO(n+1) \times_\rho \mathbb{R}^{n+1} \\ = &TM \oplus (M \times \mathbb{R}) \end{aligned}$$

となる． ■

6.2.2 捩れ積（cone）

M をスピン多様体として，捩れ積 $\bar{M} = M \times_{r^2} \mathbb{R}^+$（$M$ の cone）を考える．つまり，多様体としては，$M \times \mathbb{R}^+ = M \times (0, \infty)$ であり，計量を $r^2 g_M + dr^2$ で入れたものである：

$$\bar{M} = M \times_{r^2} \mathbb{R}^+ = (M \times \mathbb{R}^+, r^2 g_M + dr^2)$$

射影 $p_1 : \bar{M} \to M$ を考えて，$p_1^* \mathbf{SO}_{n+1}(M) \times_\rho \mathbb{R}^{n+1}$ を考える．これは束としては，$T\bar{M} = TM \oplus (M \times \mathbb{R})$ と同型である．さらに，

$$p_1^* \mathbf{SO}_{n+1}(M) \ni (e_1, \cdots, e_n, 1) \mapsto (\frac{1}{r} e_1, \cdots, \frac{1}{r} e_n, \partial_r) \in \mathbf{SO}(\bar{M})$$

とすれば，等長同型になる．

この捩れ積上のレビチビタ接続 ∇' を $p_1^* \mathbf{SO}_{n+1}(M)$ 上でみると，

$$\begin{pmatrix} A_{LC} & \Theta \\ -\Theta^t & 0 \end{pmatrix}$$

となる．

Proof. 直接計算することで，

$$\nabla'_r \partial_r = 0, \quad \nabla'_r X = \nabla'_X \partial_r = \frac{X}{r}, \quad \nabla'_X Y = \nabla_X Y - r g_M(X, Y) \partial_r$$

となる．そこで，$p_1^* \mathbf{SO}_{n+1}(M) \to \mathbf{SO}(\bar{M})$ の対応を考えればよい． ■

以上から，

Proposition 6.5. 振れ積 $\bar{M}$ 上のレビチビタ接続は，$p_1^*\mathbf{SO}_{n+1}(M)$ 上の接続 A（$a = -1/2$）に一致する．また，振れ積の向きを逆にすれば（つまり，$\partial_r \to -\partial_r$），振れ積 $\bar{M}$ 上のレビチビタ接続は，$p_1^*\mathbf{SO}_{n+1}(M)$ 上の接続 A（$a = 1/2$）に一致する

振れ積 $\bar{M}$ のリーマンホロノミー群 $Hol(\bar{M})$ を考える．上で述べたことから，これは $p_1^*\mathbf{SO}_{n+1}(M)$ の接続 A に対するホロノミー群に一致する．また，$\widetilde{Hol}(M) \subset Spin(n+1)$ を $\mathbf{Spin}_{n+1}(M)$ に対するホロノミー群とする．このとき，次は明らかである．

Lemma 6.6. *M を単連結とする，$a = -1/2$ とすれば，$Hol(\bar{M}) = \mathrm{Ad}(\widetilde{Hol}(M))$ となり，$\widetilde{Hol}(M)$ は $\mathrm{Ad}^{-1}(Hol(\bar{M}))$ の単位元連結成分である．$a = 1/2$ とすれば，$\bar{M}$ の向きを変えれば同様のことが成立する．*

さらに，次のことが知られている．

Lemma 6.7. *M をコンパクト単連結とする．$Hol(\bar{M})$ が可約なら $\bar{M}$ は平坦である．よって，M は球面に等長同型．*

Proof. $\bar{M}$ が平坦なら M が球面に等長同型であることは，簡単．$Hol(\bar{M})$ が可約なら $\bar{M}$ は平坦であることは，Gallot の論文「Equations différentielles caractéristiques de la sphere」(Ann. Sc. Ec. Norm. Sup, 12, 235-267. 1979) を参照. (難しくない．リーマン直積に分解すると仮定して，計量が $r^2 g_M + dr^2$ であることを使えば，曲率が零となることがわかる）． ■

6.2.3 分類

さて，スピン多様体 M 上に実キリングスピノール ϕ が存在したとする．正規化してキリング数は $\pm 1/2$ としてよい．キリングスピノールは $\nabla_X \phi = \pm\frac{1}{2} X\phi$ を満たすので，$\tilde{\nabla}$ に対して平行である．M を完備単連結として，キリング数 $1/2$ のキリングスピノールを持つとする．このとき M はコンパクトでアインシュタインである（$Ric = n-1$）．そこで，$\bar{M}$ が単連結リッチ平坦であることがわかる．よって，Berger の分類が使える．まず．$\bar{M}$ が可約なら，補題から $\bar{M}$ は平坦であり，M は球面と等長同型である．そこで $\bar{M}$ は既約単連結リッチ平坦多様体としよい．また，対称空間としてもユークリッド空間となるので，平坦であり M は球面と等長同型である．そこで，$\bar{M}$ のホロノミー群の候補は自明（ユークリッド空間），$SU(m)$, $Sp(k)$, $Spin(7)$, G_2 のいずれかに一致する．

また，$p_1^*\mathbf{SO}_{n+1}(M) \simeq \mathbf{SO}(\bar{M})$ を使って，$p_1^*\mathbf{Spin}_{n+1}(M) \simeq \mathbf{Spin}(\bar{M})$ であり，接続 A（$a = -1/2$）と $\bar{M}$ 上のスピン接続は一致する．そして，**M 上のキリング数 $1/2$ のキリングスピノールは cone $\bar{M}$ 上の平行スピノールに一致**する（よって，$\tilde{H}ol(M) \simeq Hol(\bar{M})$）．実際．キリングスピノールは $\tilde{\nabla}$ に対して平行であった．ただし，n が偶数なら $W_n = W_{n+1}$，n が奇数なら $W_n = W_{n+1}^+$ であることに注意しなけ

ればならない．n が偶数の場合に $\bar{M}$（$\dim \bar{M} = n+1$）に平行スピノールが存在したとき，$\bar{M}$ の向きをかえたとき，その平行スピノールは M 上でキリング数が $-1/2$ のキリングスピノールに対応する．また，n が奇数の場合に，$\bar{M}$（$\dim \bar{M} = n+1$）上の $\mathbf{S}^+$ に入る平行スピノールが，M 上でキリング数 $1/2$ のキリングスピノールに対応し，$\bar{M}$ の向きをかえたときには，$\mathbf{S}^+$ が $\mathbf{S}^-$ になるので，$\bar{M}$ の $\mathbf{S}^-$ に入る平行スピノールが M 上のキリング数 $-1/2$ のキリングスピノールに対応する．以上のことに注意すれば，分類ができる．

n が偶数 $2m$ とすると，$n+1 = 2m+1$ は奇数である．このとき $\bar{M}$ は平坦または G_2 多様体である．

1. $\bar{M}$ が平坦の時は M は球面であり，$\dim \mathcal{K}_{\pm} = 2^{n/2}$ となる．

2. $\bar{M}$ のホロノミー群が G_2 の場合には，平行スピノールは一つである，$\bar{M}$ の向きを変えた場合にも，対応する平行スピノールが存在するので，M のキリングスピノールは $\dim \mathcal{K}_{\pm} = 1$ となる．

次に，n が奇数 $n = 2m-1$ の場合を考える．この場合には，$\bar{M}$ は平坦またはホロノミー群が $SU(m)$, $Sp(k)$, $Spin(7)$ のいずれかとなる．

1. $\bar{M}$ が平坦なら M は球面であり，$\dim \mathcal{K}_{\pm} = 2^{[n/2]}$ となる．

2. $\bar{M}$ のホロノミー群が $SU(m)$ となる場合を考える．このとき $\mathbf{S} = \oplus \Lambda^{0,p}$ となる．そして，$\Lambda^{0,0}$, $\Lambda^{0,n}$ が平行スピノールがいる空間である．m が偶数なら，$\Lambda^{0,0} \oplus \Lambda^{0,n} \subset \mathbf{S}^+$ であるので，M 上にキリング数が $1/2$ の独立なキリングスピノールが二つ存在する．つまり $\dim \mathcal{K}_+ = 2$ かつ $\dim \mathcal{K}_- = 0$．m が奇数なら，$\Lambda^{0,0} \subset \mathbf{S}^+$, $\Lambda^{0,n} \subset \mathbf{S}^-$ となるので，$\dim \mathcal{K}_{\pm} = 1$ となる．

3. $\bar{M}$ のホロノミー群が $Sp(k)$ となる場合を考える．$\bar{M}$ 上に平行スピノールが $k+1$ 個存在した．すべて $\mathbf{S}^+$ に入るので，M 上で $\dim \mathcal{K}_+ = k+1$ かつ $\dim \mathcal{K}_- = 0$ となる．

4. $\bar{M}$ のホロノミー群が $Spin(7)$ となる場合には，$\bar{M}$ 上には一つ平行スピノールが存在した．これは $\mathbf{S}^+$ に入ることが知られている．よって，M 上で，$\dim \mathcal{K}_+ = 1$ かつ $\dim \mathcal{K}_- = 0$ となる．

以上で，単連結スピン多様体で実キリングスピノールをもつ場合の分類ができた．さらに，$\bar{M}$ の構造および M のキリングスピノールから，M 上にどのような幾何構造が入るかを調べることができる．これについては，もと論文 [2] を参照．また，[5] も参照．

Theorem 6.8. M を完備単連結 n 次元スピン多様体で，実キリングスピノールをもつとする．このとき M は次のいずれかである．ここで $\bar{M}$ は M の *cone* である．

$n = \dim M$	$Hol(\overline{M})$	幾何構造	$\dim(\mathcal{K}_+, \mathcal{K}^-)$
n	$SO(n)$	*general*	$(0,0)$
n	$\{1\}$	S^n	$(2^{[n/2]}, 2^{[n/2]})$
$4k+1$	$SU(2k+1)$	*Einstein-Sasakian*	$(1,1)$
$4k-1$	$SU(2k)$	*Einstein-Sasakian*	$(2,0)$
$4k-1$	$Sp(k)$	*3-Sasakian*	$(k+1,0)$
7	$Spin(7)$	*nearly parallel vector cross product*	$(1,0)$
6	G_2	*nearly-Kähler* かつ *non-Kähler*	$(1,1)$

Corollary 6.9. M **を偶数次元完備スピン多様体で実キリングスピノールを持つとする（単連結は仮定しない）．このとき，次元が** 6 **でないなら，**M **は標準球面である．**

Proof. M が実キリングスピノールを持つなら，普遍被覆 $\tilde{M}$ も実キリングスピノールをもつ．そしてコンパクトである．上のリストから，$n=6$ の場合ははずせるので，$\tilde{M}$ は球面である．そして，M も正の定曲率空間である．偶数次元なので，M は球面または実射影空間である．しかし，偶数次元実射影空間は向き付け不可能なのでありえない．よって，M は球面である． ■

Remark 6.3. 6 次元完備単連結スピン多様体で実キリングスピノールをもつなら，M は球面または $\bar{M}$ のホロノミー群が G_2 に一致する．また，6 次元の場合には，概複素構造と実キリングスピノールが関係している（[5]）．

6.3 虚キリングスピノール

次に，虚キリングスピノールの分類について考える．これは単連結を仮定しなくてもよい．以下の結果は H. Baum [4] による．

Theorem 6.10. 完備連結スピン多様体 M **で，虚キリングスピノールをもつとする（キリング数** $i\mu$**）．このとき，**M **は *warped product*（捩れ積）**

$$(F^{n-1} \times \mathbb{R}, e^{-4\mu t}h + dt^2)$$

と等長同型である．ここで，(F^{n-1}, h) **は，完備連結スピン多様体で平行スピノールを持つもの**である．逆に，(F^{n-1}, h) は，完備連結スピン多様体で平行スピノールを持つとすると，$(F^{n-1} \times \mathbb{R}, e^{-4\mu t}h + dt^2)$ は虚キリングスピノールをもつ．

証明はしないが，方針は次のよう：虚キリングスピノール ϕ に対して，$f(x) = \langle \phi, \phi \rangle$ は定数でない零点がない関数である．これを高さ関数だとみなし，モース理論を行うのである．f のレベル曲面が F^{n-1} となる．（詳細は [4] や [5]）

Remark 6.4. (B,k), (F,h) をリーマン多様体とすれば，$(B \times F, k \times h)$ はリーマン多様体である．f を B 上の正の関数として，上のリーマン直積をねじったものが振れ積 $M = (B \times_f F, k + fh)$ である．このとき $\pi : M \to B$ はリーマン沈め込みである．F をアインシュタイン空間として，f が適当な非線形微分方程式をみたしたとき，M もアインシュタイン空間になることがしられている（[6], page 267）．このように，振れ積は，アインシュタイン空間を作る一つの方法として知られている．特に，$\dim B = 1$, $\dim F > 1$ のときには f は線形方程式になる．

その他にも，振れ積はリーマン幾何でよく見かける話題である．

Example 6.1. 双曲空間を振れ積として書けば

$$H^n = (\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}, e^{-2t} g_0 + dt^2)$$

となる．これは上半平面による記述である．つまり $H^n = \{(x_1, \cdots, x_m) \mid x_m > 0\}$ として，計量を $\frac{1}{x_m^2} \sum dx_i^2$ によって入れる．ここで $x_m = e^t$ と変数変換すれば，上の振れ積になる．

6.4 幾何構造とキリングスピノール

実キリングスピノールをもつスピン多様体の分類は，ディラック作用素の二乗 D^2 に対する Friedrich 固有値評価で等号を満たすスピン多様体の分類と同じであった．幾何構造があった時の固有値評価に対しても，様々な結果が知られている．

- ケーラースピン多様体上では，ケーラー構造があるので，Friedrich 固有値評価より良い評価を得る（by Kirchberg）．等号が成立する多様体を考える．もちろん，Friedrich 固有値評価の等号成立とは一致しないので，そのような多様体上にはキリングスピノールは存在しない．しかし，ケーラー多様体上での一般化として，ケーラーツイスタースピノールや**ケーラーキリングスピノール**の概念がある（定義は簡単）．そして，等号が成立するケーラー多様体の分類は，ケーラーキリングスピノールを持つ多様体の分類となる．この分類は Kirchberg から始まり，最終的には Morianu により解決されている．特に，Moroianu は**複素奇数次元でケーラーキリングスピノールを持つものは，正四元数ケーラー多様体上のツイスター空間である**ことを示した．また，複素偶数次元の場合には，その普遍被覆が $M \times \mathbb{R}^2$ と等長同型であることを示した（ここで，M は複素奇数次元のケーラーキリングスピノールを持つもの）．

  上記の解説は Moroianu「Special Spinors and Contact Geometry」, Quaternionic structures in mathematics and physics - Rome , 273-283 (1999).

  をみよ．Moroianu のページからダウンロード化.

- 正四元数ケーラー多様体（正とはスカラー曲率が正）上の D^2 の固有値評価は Kramer, Semmelmann, Weingart による．等号が成立する四元数ケーラー多様体の分類は，**四元数キリングスピノール**をもつ多様体の分類となる．そして，Kramer, Semmelmann, Weingart らにより，それは**四元数射影空間となる**ことがわかっている．

- Berger の分類における，上記以外のホロノミー群をもつ多様体を考えた場合には，**平行スピノールが存在する**ので，D^2 は零固有空間を持ってしまう．つまり，第一固有値の評価は意味がない．

7　ホッジ-ラプラシアン

この section では，微分形式上のディラック作用素 $d+d^*$ について考える．また，その固有値評価や関連した話題である共形キリング作用素について論じる．

7.1　ホッジ-ラプラシアン

向きつきリーマン多様体上の微分形式の束 $\Lambda^*(M)\otimes\mathbb{C}$ を考える．これは同伴ベクトル束としてクリフォード束と同型であった．さらに左クリフォード積を $\Lambda^*(M)\otimes\mathbb{C}$ へ作用とみれば

$$L_v = v\wedge -\iota(v)$$

となるのであった．また $\mathbb{C}l(M)$ がこの左クリフォード作用により**ディラック束**となる．

Proof. 内積は $\Lambda^*(M) = Cl(M)$ に入る通常の実内積を考える．複素化したものに自然なエルミート内積をいれることによる．実内積の時点で $\langle e_i\phi,\psi\rangle + \langle\phi, e_i\psi\rangle = 0$ は成立している（$v\cdot = v\wedge -\iota(v)$ からわかる）．クリフォード作用は実作用であったので同様の式がエルミート内積についても成り立つ．また ∇ とクリフォード積の可換性は明らか． ■

さて，このベクトル束に対するディラック作用素を考えると

$$D_L = \sum e_i\nabla_{e_i} = \sum e_i\wedge\nabla_{e_i} + \sum -\iota(e_i)\nabla_{e_i} = d+d^*$$

となる．

Proof. $d=\sum e_i\wedge\nabla_{e_i}$, $d^* = \sum -\iota(e_i)\nabla_{e_i}$ となることを証明すればよい．$\{e_i\}$ を局所正規直交フレーム束で，点 x において $(\nabla e_i)_x = 0$ となるものとする．$\phi\in\Lambda^*(M)$ として

$$\phi = fe_1\wedge\cdots\wedge e_p$$

に対して証明すれば十分である．点 x で考えれば

$$\sum e_i \wedge \nabla_{e_i}\phi = \sum_i (e_i f) e_i \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_p = d\phi$$

となる．同様に $d^*\phi = ((-1)^{np+n+1} * d*)\phi = -\sum \iota(e_i)\nabla_{e_i}\phi$ となることがわかる．

■

また右作用を考えると

$$R_v = (-1)^p(v \wedge + \iota(v))$$

となるのであった．この場合もディラック束になり，ディラック作用素は

$$D_R = (-1)^p(d - d^*)$$

となる．以上から

Proposition 7.1. $\Lambda^*(M) \otimes \mathbf{C} = \mathbb{C}l(M)$ 上で

$$D_R = d + d^*, \quad D_L = (-1)^p(d - d^*), \quad D_L D_R = D_R D_L$$

であり，さらに $d^2 = (d^*)^2 = 0$ から

$$D_R^2 = D_L^2 = dd^* + d^*d$$

となる．つまりディラック作用素の二乗は**ホッジ-ラプラシアン** $dd^* + d^*d$ である．ここで $D_R,\ D_L$ は微分形式の次数は保たないが，それらの二乗は次数を保つことに注意する．よって $\ker D_R = \ker D_R^2$ であるので $\ker D_R$ には微分形式としての次数で分解される．

Corollary 7.2. (M, g) をコンパクトとすれば，$dd^* + d^*d$ の *kernel* は調和微分形式の空間であった．調和 p 形式の空間を $\mathbf{H}^p$ と書く．このとき

$$\ker D_L = \ker D_R = \ker(dd^* + d^*d) = \oplus_{p=0}^n \mathbf{H}^p = \oplus_{p=0}^n H^p(M, \mathbb{R})$$

またホッジ作用素は体積要素の定数倍となるが，これらは平行であったので，ホッジラプラシアンと可換である．特に，$* : \mathbf{H}^p \simeq \mathbf{H}^{n-p}$ という**ポアンカレ双対**が成立することがわかる．

Remark 7.1. 複素化して考えてるので調和形式も複素係数であるが，実部を考えてもよいことは明らか．

7.2　オイラー数と符号数

次に $d+d^*$ というディラック作用素の指数定理を使って，ガウス-ボンネ-チャーンの定理と符号数定理を証明しよう．リーマン多様体を偶数次元でコンパクトとする．指数定理を使うには，局所的に $\mathbf{S}\otimes\mathbf{E}$ と分解すればよいのであるが，このような分解は一つとは限らない．実際,「スピン幾何入門２」で見たように $\mathbb{C}l_{2m}$ には二つの grading $\mathbb{C}l(M)=\mathbb{C}l^0(M)\oplus\mathbb{C}l^1(M)$ と $\mathbb{C}l(M)=\mathbb{C}l^+(M)\oplus\mathbb{C}l^-(M)$ が存在した．

まずオイラー数を与える分解を考える．偶数次元なので $\mathbb{C}l(M)=\mathbf{S}\otimes\mathbf{S}^*$ という分解が成立．オイラー数を与える D_L の分解

$$D_L=\begin{pmatrix}0 & D_L^-\\ D_L^+ & 0\end{pmatrix}$$

は

$$D_L^+:\Lambda^{even}(M)\otimes\mathbb{C}\to\Lambda^{odd}(M)\otimes\mathbb{C},\quad D_L^-:\Lambda^{odd}(M)\otimes\mathbb{C}\to\Lambda^{even}(M)\otimes\mathbb{C}$$

という分解を考える.「スピン幾何入門２」より

$$\begin{aligned}\Lambda^{even}(M)\otimes\mathbb{C}=\mathbb{C}l^0(M)=\mathbf{S}^+\otimes(\mathbf{S}^+)^*\oplus\mathbf{S}^-\otimes(\mathbf{S}^-)^*,\\ \Lambda^{odd}(M)\otimes\mathbb{C}=\mathbb{C}l^1(M)=\mathbf{S}^+\otimes(\mathbf{S}^-)^*\oplus\mathbf{S}^-\otimes(\mathbf{S}^+)^*\end{aligned}$$

となる．そこで $\mathbf{S}\otimes(\mathbf{S}^+)^*$ と $\widehat{\mathbf{S}}\otimes(\mathbf{S}^-)^*$ というベクトル束を別々に考える．ただし $\widehat{\mathbf{S}}$ は $\mathbf{S}$ で $\pm$ を逆にしたもの．$\mathbf{S}\otimes(\mathbf{S}^+)^*$ に対しては twisted ディラックの指数定理をそのまま適用すればよい．$\widehat{\mathbf{S}}\otimes(\mathbf{S}^-)^*$ は $\pm$ が逆になることに注意して twisted ディラックの指数定理を使えば,

$$\mathrm{ind}(D_L)=\dim\ker D_L^+-\dim\ker D_L^-=\int_M\hat{\mathbf{A}}(TM)ch((\mathbf{S}^+)^*)-\int_M\hat{\mathbf{A}}(TM)ch((\mathbf{S}^-)^*)$$

となる．一方で,

$$\begin{aligned}\dim\ker D_L^+-\dim\ker D_L^-&=\sum\dim\mathbf{H}^{2p}-\sum\dim\mathbf{H}^{2p+1}\\ &=\sum(-1)^p\dim\mathbf{H}^p=\sum(-1)^pb_p=\chi(M)\end{aligned}$$

となる（$\chi(M)$ は M のオイラー数）．以上から

$$\chi(M)=\int_M\hat{\mathbf{A}}(TM)(ch((\mathbf{S}^+)^*)-ch((\mathbf{S}^-)^*))$$

となる．そこで右辺の特性類を計算しよう．

1. $\mathbf{V}$ を実向きつき rank $2r$ ベクトル束とする．このとき分解定理から $\mathbf{V} = l_1 \oplus \cdots \oplus l_r$ と仮定してよい．ここで l_i は実向きつき rank 2 ベクトル束であるが，これは複素直線束とみなすことができる．l_i に対するオイラー類は第一チャーン類で定義する．$e(l_i) := c_1(l_i)$．そして $x_i = c_1(l_i)$ として．$\mathbf{V}$ に対する**オイラー類**を

$$e(\mathbf{V}) = x_1 \cdots x_r$$

と定義する．

2. $\mathbf{E}$ を複素ベクトル束とする．$\mathbf{E} = l_1 \oplus \cdots \oplus l_r$ として $c_1(l_i) = x_i$ とする．$c_1(l_1^*) = -x_i$ であったので，$ch(\mathbf{E}^*) = \sum e^{-x_i}$ となる．また $ch(\mathbf{E} \otimes \mathbf{F}) = ch(\mathbf{E})ch(\mathbf{F})$ および $ch(\mathbf{E} \oplus \mathbf{F}) = ch(\mathbf{E}) + ch(\mathbf{F})$ となることはすぐわかる．

3. TM は実向きつき rank $2m$ ベクトル束であり，$TM \otimes \mathbb{C} = l_1 \oplus \bar{l_1} \oplus \cdots \oplus l_m \oplus \bar{l_m}$ と分解され，$c_1(l_1) = x_1$ とすれば

$$\hat{\mathbf{A}}(TM) = \prod \frac{x_j/2}{\sinh x_j/2}$$

となる．

4. $ch((\mathbf{S}^+)^*) - ch((\mathbf{S}^-)^*)$ を計算しよう．まず M がリーマン面の場合を考える．つまり $TM \otimes \mathbf{C} = TM^{1,0} \oplus TM^{0,1} = l_1 \oplus \bar{l_1}$，$c_1(l_1) = x_1$ とする．リーマン面のスピノール束で見たように，$\mathbf{S}^+ = \Lambda^{0,0}(M) \otimes \sqrt{\Lambda^{1,0}(M)}$，$\mathbf{S}^- = \Lambda^{0,1}(M) \otimes \sqrt{\Lambda^{1,0}(M)} = \sqrt{\Lambda^{0,1}(M)}$ である．そこで

$$c_1(K) = -c_1(TM^{1,0}) = -x_1, \quad c_1(\sqrt{K}) = -x_1/2$$

となるので

$$ch((\mathbf{S}^+)^*) - ch((\mathbf{S}^-)^*) = e^{x_1/2} - e^{-x_1/2}$$

となる．一般には分解原理を考えればよいが，複素クリフォード代数の周期性 $\mathbb{C}l_{n+2} = \mathbb{C}l_n \otimes \mathbb{C}l_2$ を考えれば，スピノール束はテンソル積分解されることになる．よって $TM \otimes \mathbf{C} = l_1 \oplus \bar{l_1} \oplus \cdots \oplus l_m \oplus \bar{l_m}$ に対しては $\mathbf{S} = (\bar{l_1}^{1/2} \oplus l_1^{1/2}) \otimes \cdots \otimes (\bar{l_m}^{1/2} \oplus l_m^{1/2})$ と分解される．仮想的に考えて

$$\mathbf{S}^+ - \mathbf{S}^- = (\bar{l_1}^{1/2} - l_1^{1/2}) \otimes \cdots \otimes (\bar{l_m}^{1/2} - l_m^{1/2})$$

となるので，

$$ch((\mathbf{S}^+)^*) - ch((\mathbf{S}^-)^*) = \prod (e^{x_i/2} - e^{-x_i/2})$$

となる．

5. 上の計算は次のように表現の weight 分解を考えるてもよい．$\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{C}$ の weight 分解は $(0_{i-1}, \pm 1, 0_{m-i})$ となる．$(0_{i-1}, 1, 0_{m-i})$ という weight をもつ weight 空間に対応するものが l_i である．この weight 分解が，まさに $TM \otimes \mathbb{C} = l_1 \oplus \bar{l_1} \oplus \cdots \oplus l_n \oplus \bar{l_m}$ である．一方スピノール表現 Δ_{2m} を weight 分解した時の，weigth は $(\pm 1/2, \cdots, \pm 1/2)$ となった．例えば $(1/2, \cdots 1/2)$ に対応する直線束は $l_1^{1/2} \otimes \cdots \otimes l_m^{1/2}$ である．よって $\mathbf{S}$ を分解したときの各成分の c_1 は
$$\frac{1}{2}(\pm x_1 \pm \cdots \pm x_m)$$
となる．そこで $ch(\mathbf{E} \oplus \mathbf{F}) = ch(\mathbf{E}) + ch(\mathbf{F})$ を利用すれば $ch((\mathbf{S}^+)^*) - ch((\mathbf{S}^-)^*)$ を求めることができる．

6. さて，上で述べたことをあわせれば
$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{A}}(TM)(ch((\mathbf{S}^+)^*) - ch((\mathbf{S}^-)^*)) &= \prod \frac{x_j/2}{\sinh x_j/2} \prod (e^{x_i/2} - e^{-x_i/2}) \\ &= \prod \frac{x_i/2}{\frac{1}{2}(e^{x_j/2} - e^{-x_j/2})}(e^{x_i/2} - e^{-x_i/2}) \\ &= x_1 \cdots x_m = e(TM)\end{aligned}$$
となるので，接束のオイラー類になる．

Proposition 7.3 (ガウス-ボンネ-チャーン定理). M を向きつき偶数次元多様体とする．このとき
$$\chi(M) = \int_M e(TM)$$
となる．ここで $e(TM)$ は TM のオイラー類という $H^{2m}(M, \mathbb{R})$ に値をもつ特性類.

次に符号数定理について考える.「スピン幾何入門２」より
$$\mathbb{C}l^+(M) = \mathbf{S}^+ \otimes \mathbf{S}^*, \quad \mathbb{C}l^-(M) = \mathbf{S}^- \otimes \mathbf{S}^*$$
という分解を考え，ディラック作用素 D_L の分解は
$$D_L^{\pm} : \Gamma(\mathbb{C}l^{\pm}(M)) \to \Gamma(\mathbb{C}l^{\mp}(M))$$
とする．twisted ディラックの指数定理から
$$\mathrm{ind}\,(D_L) = \dim\ker D_L^+ - \dim\ker D_L^- = \int_M \hat{\mathbf{A}}(TM)ch(\mathbf{S}^*)$$
となる．

さて $\mathbb{C}l^+(M) \oplus \mathbb{C}l^-(M)$ の分解は体積要素による分解であるが，ホッジ作用素と体積要素の関係は $\phi \in \Lambda^p(M)$ に対して，
$$\omega \cdot \phi = i^{[\frac{n+1}{2}]}(-1)^{p(n-p)+\frac{1}{2}p(p+1)} * \phi$$
である．

Proof. $\phi = e_1 \wedge \cdots \wedge e_p$ として証明する．

$$*\phi = e_{p+1} \wedge \cdots \wedge e_n$$

であるが

$$\omega\phi = i^{[(n+1)/2]}(e_1 \cdots e_n)(e_1 \cdots e_p) = i^{[(n+1)/2]}(-1)^{p(n-p)+\frac{1}{2}p(p+1)}e_{p+1} \cdots e_n$$

となる ■

我々は偶数次元だけ考えるので

$$\omega \cdot \phi = (-1)^{p^2+\frac{1}{2}(p(p+1)+m)} * \phi = (-1)^{(p(p-1)+m)/2} * \phi$$

となる．体積要素の掛け算によって同型

$$\omega : \Lambda^p(M) \otimes \mathbb{C} \simeq \Lambda^{2m-p}(M) \otimes \mathbb{C}$$

が成立した．体積要素は平行であったので調和形式の同型

$$\omega : \mathbf{H}^p \simeq \mathbf{H}^{2m-p},$$

という同型を得る．そこで $p < m$ に対して，

$$\mathbf{H}^p \oplus \mathbf{H}^{2m-p} = \mathbf{H}_+(p) \oplus \mathbf{H}_-(p)$$

が ω に関する分解となり，$\dim \mathbf{H}_+(p) = \dim \mathbf{H}_-(p)$ が成立する．一方 $p = m$ のときは

$$\mathbf{H}^m = \mathbf{H}^m_+ \oplus \mathbf{H}^m_-$$

となる．ここで「スピン幾何入門２」で見たように $n = 2m = 4k+2$ なら $(\Lambda^m_+(M)\otimes\mathbb{C})^* = \Lambda^m_-(M)\otimes\mathbb{C}$ であり，これは調和形式にも遺伝して $\dim \mathbf{H}^m_+ = \dim \mathbf{H}^m_-$ となる．

上で述べたことから

$$\begin{aligned}\dim\ker D_L^+ - \dim\ker D_L^- &= \sum_{p=0}^{m-1}(\dim \mathbf{H}^+(p) - \dim \mathbf{H}^-(p)) + \dim \mathbf{H}^m_+ - \dim \mathbf{H}^m_- \\ &= \dim \mathbf{H}^m_+ - \dim \mathbf{H}^m_-\end{aligned}$$

となる．ただし $n = 2m = 4k + 2$ の場合には零となる．

そこで我々が考えるべきは $n = 2m = 4k$ の場合である．このときの $\dim \mathbf{H}^m_+ - \dim \mathbf{H}^m_-$ の意味を考えよう．まず向きつき $n = 2m = 4k$ 次元多様体に M を考えたとき $H^m(M, \mathbb{C})$ 上に次の二次形式が存在する

$$Q : H^m(M, \mathbb{C}) \times H^m(M, \mathbb{C}) \ni (\phi, \psi) \mapsto Q(\phi, \psi) = \int_M \phi \wedge \psi \in \mathbb{C}$$

$n=4k$ なら $\phi\wedge\psi=\psi\wedge\phi$ から Q は対称二次形式であり，その符号数を考えることができる．この符号数は多様体の位相（＋向き）のみで定まる量であり，$\sigma(M)$ **と書き** M **の符号数**と呼ぶ．さて $n=2m=4k$ なら $\Lambda^m(M)$ 上で $\omega=*$，$*^2=1$ となるので $H^m(M,\mathbb{C})\simeq\mathbf{H}^m=\mathbf{H}^m_+\oplus\mathbf{H}^m_-$ という分解は，Hodge 作用素による $\pm$ 分解である．そして

$$\int_M\phi_+\wedge\phi_+=\int_M\phi_+\wedge*\phi_+=\|\phi_+\|^2$$
$$\int_M\phi_-\wedge\phi_-=-\int_M\phi_-\wedge*\phi_-=-\|\phi_-\|^2$$
$$\int_M\phi_+\wedge\phi_-=-\int_M\phi_+\wedge*\phi_-=-(\phi_+,\phi_-)=0$$

となるので，

$$\sigma(M)=\dim\mathbf{H}^m_+-\dim\mathbf{H}^m_-=\int_M\hat{\mathbf{A}}(TM)ch(\mathbf{S}^*)$$

を得る．

右辺の特性類を計算しよう．オイラー数のときと同様に

$$ch(\mathbf{S}^*)=\prod(e^{x_i/2}+e^{-x_i/2})$$

であるので

$$\hat{\mathbf{A}}(TM)ch(\mathbf{S}^*)=\prod\frac{x_j/2}{\sinh x_j/2}(e^{x_i/2}+e^{-x_i/2})=\prod\frac{x_j/2}{\tanh x_j/2}$$

となる．この特性類をもう少し詳しく見てみる

$$\frac{x}{\tanh x}=1+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{45}x^4+\cdots$$

となる．そこで，

$$L(M):=\prod\frac{x_j}{\tanh x_j}=1+L_1(M)+L_2(M)+\cdots,$$
$$\hat{L}(M):=\prod\frac{x_j/2}{\tanh x_j/2}=1+\hat{L}_1(M)+\hat{L}_2(M)+\cdots$$

とすれば，これらはポントリャーギン類で書けることになり

$$L_1(M)=\frac{1}{3}p_1(M),\quad L_2(M)=\frac{1}{45}(7p_2(M)-p_1(M)^2),\cdots$$

となる．また $L_i(M)=4^i\hat{L}(M)$ が成り立つ．よって

$$\sigma(X)=\int_M\hat{L}_k(M)=4^k\int_M L_k(M)=2^m\int_M L_{m/2}(M)$$

が成り立つ．

Proposition 7.4. M を向きつき $4k$ 次元多様体とする．このとき

$$\sigma(X) = 4^k \int_M L_k(M)$$

が成立する．ここで $L_k(M)$ は *Hirzebruch* L-類と呼ばれるもである．

Example 7.1. 4 次元向きつきスピン多様体上で考えると，

$$\hat{A}(M) = -\frac{1}{24}p_1(M) = -\frac{1}{8}\frac{1}{3}p_1(M) = -\frac{1}{8}\sigma(M)$$

となる．

7.3 ボホナーワイゼンベック公式と消滅定理

$d + d^*$ に対するボホナーワイゼンベック公式を計算しよう．これは twisted とみなすよりも直接計算してしまったほうが楽．計算方法は Lichnerowicz 公式と全く同じであるが，異なるのは曲率作用のところである．実際

$$D_L^2 = dd^* + d^*d = \nabla^*\nabla + \sum e_i \cdot e_j \cdot R_{\Lambda^*}(e_i, e_j)/2$$

がわかる．ここで $R_{\Lambda^p}(e_i, e_j)$ は $\Lambda^p(M)$ 上の曲率作用である．曲率は局所的な話であるので，$\mathbb{C}l(M) = \mathbf{Spin}(M) \times_{\mathrm{Ad}} \mathbb{C}l_n$ とみなせば，

$$R_{\mathrm{Ad}}(e_i, e_j)\phi = \frac{1}{8}\sum_{k,l} R_{ijkl}[[e_k, e_l], \phi]$$

となる．さて D_R^2 も考えると

$$D_R^2(\phi) = \nabla^*\nabla\phi + \frac{1}{2}\sum (R_{\Lambda^*}(e_i, e_j)\phi)e_j e_i$$

となる．$D_R^2 = D_L^2$ であるので

$$\frac{1}{8}\sum_{k,l} R_{ijkl} e_i e_j [[e_k, e_l], \phi] = \frac{1}{8}\sum_{k,l} R_{ijkl}[[e_k, e_l], \phi] e_j e_i = -\frac{1}{8}\sum_{k,l} R_{ijkl}[[e_k, e_l], \phi] e_i e_j \tag{7.1}$$

が成立する．よって

$$\frac{1}{2}\sum e_i \cdot e_j \cdot R_{\Lambda^*}(e_i, e_j)\phi = \frac{1}{64}\sum_{ijkl} R_{ijkl}[[e_i, e_j], [[e_k, e_l], \phi]]$$

となる．これを計算すればよい．

まず $\Lambda^1(M)$ で計算する．

$$\begin{aligned}
[[e_i, e_j], [[e_k, e_l], e_s]] &= 4\delta_{ks}(4\delta_{li}e_j - 4\delta_{lj}e_i) - 4\delta_{ls}(4\delta_{ki}e_j - 4\delta_{kj}e_i) \\
&= 16(\delta_{ks}\delta_{li} - \delta_{ls}\delta_{ki})e_j - 16(\delta_{ks}\delta_{lj} - \delta_{ls}\delta_{kj})e_i
\end{aligned}$$

よって

$$\frac{1}{64}\sum R_{ijkl}[[e_i,e_j],[[e_k,e_l],e_s]] = \sum(R_{itsi}e_t - R_{itis}e_t - R_{tjsj}e_t + R_{tjjs}e_t)$$
$$= \sum R_{ts}e_t = Ric(e_s)$$

となる．以上から

Proposition 7.5 (ボホナーワイゼンベック公式)**.** $\Lambda^1(M)$ 上で

$$dd^* + d^*d = \nabla^*\nabla + Ric$$

でが成立する．また，一般の $\Lambda^p(M)$ 上では，このようにきれいにならず，W_{ijkl} などの作用がのこるので

$$dd^*+d^*d = \nabla^*\nabla + \frac{1}{64}\sum_{ijkl} R_{ijkl}[[e_i,e_j],[[e_k,e_l],\phi]] = \nabla^*\nabla + \frac{1}{16}\sum_{ijkl} R_{ijkl}[e_ie_j,[e_ke_l,\phi]]$$

という形のままにしておく．

Remark 7.2. $1/16\sum_{ijkl} R_{ijkl}[e_ie_j,[e_ke_l,\phi]]$ という項は，Λ^p への $\mathfrak{so}(n)$ への表現を π_{Λ^p} と書けば，

$$1/4\sum R_{ijkl}\pi_{\Lambda^p}(e_i\wedge e_j)\pi_{\Lambda^p}(e_k\wedge e_l)$$

となる．

ボホナーワイゼンベック公式を使って，いくつかの古典的な**消滅定理**を述べよう．

Proposition 7.6 (Bochner)**.** M をコンパクトリーマン多様体とする．$Ric>0$ **となる計量が入れば第一ベッチ数** $b_1(M)$ **は零**．これは $Ric\geq 0$ かつある点で $Ric>0$ としても成立．

また $Ric=0$ **なら，調和** 1-***form*** **の空間と平行** 1-***form*** **の空間は一致**する．

Proof. $b_1(M)>0$ とすると，$\phi\in\mathbf{H}^1$ で零でないものが存在．ボホナーワイゼンベック公式から

$$\int_M \langle Ric(\phi),\phi\rangle = -(\nabla^*\nabla\phi,\phi) = -\|\nabla\phi\|^2$$

が成立する．$Ric\geq 0$ なら $\nabla\phi=0$ となる．よって $\langle\phi,\phi\rangle$ は定数である．そこである点で $Ric>0$ なら，$\int_M\langle Ric(\phi),\phi\rangle=0$ となることは無いので矛盾である．よって $b_1(M)=0$. ■

Proposition 7.7. (M,g) をコンパクトリーマン多様体とする．$Ric=0$ **なら** $b_1(M)$ **は平行** 1-***form*** **の空間に等しい．さらに** $b_1(M)\leq\dim M$ **となる．等号成立は** M **が平坦トーラスの場合**である．

Proof. 最初の主張はすでの述べた．$k = b_1(M)$ とすれば k 個の独立な平行ベクトルが存在する．よって $k \leq \dim(M)$ となる．さて $k = \dim M$ の場合を考える．このとき平行ベクトルを $X_1, \cdots, X_n$ とすると，$[X_i, X_j] = \nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = 0$ となる．また，キリングベクトル場でもある．よって，X_i の生成する変換 ϕ_t^i は等長変換群であり，$\phi_t^i \phi_s^j = \phi_s^j \phi_t^i$ を満たす．そこで，$\mathbb{R}^n$ の等長作用が M に存在する．つまり，

$$\Phi(t_1, \cdots, t_n, x) = \phi_{t_1}^1 \cdots \phi_{t_n}^n(x), \quad x \in M$$

である．これは推移的に作用することを証明する．$x \in M$ を固定して，

$$\Phi_x(t_1, \cdots, t_n) = \Phi(t_1, \cdots, t_n, x) : \mathbb{R}^n \to M$$

を考える．まず，$d\Phi_x(t) \frac{\partial}{\partial t} = X_i(\Phi_p(t))$ であるので，$d\Phi_x(t)$ は等長線形同型であることに注意する．平行ベクトル場 $X = \sum t_i X_i$ の積分曲線 $\phi_t^X(x)$ は測地線である．そこで M はコンパクトなので，x と任意の点 y は最短測地線で結べる．その初期ベクトルが $X = \sum t_i X^i$ とすれば，

$$\Phi_x(t_1, \cdots, t_n) = \phi_{t_1}^1 \cdots \phi_{t_n}^n(x) = y$$

となるので，推移的に作用している．点 x でのイソトロピー群 H は $\mathbb{R}^n$ の閉部分群であるので，$\dim M = \dim \mathbb{R}^n$ より，離散部分群である．よって，M はコンパクトより，H は $\mathbb{R}^n$ は格子 Γ でなければならない．そして，$M = \mathbb{R}^n / \Gamma$（$d\Phi_x$ が等長同型であったので，リーマン多様体として等長同型である）．

また，M は平坦トーラスを有限群で割ったものという場合も考えられるが，ファイバー束 $T^n \to M$（ファイバー離散群）において，

$$H^1(T^n) = H^1(M) \otimes H^0(F) \oplus H^0(M) \otimes H^1(F) = H^1(M) \otimes H^0(F)$$

となり，$b_1(M) < \dim M$ になってしまう． ■

Remark 7.3. リーマン幾何では，リッチ曲率や断面曲率に適当な条件を持ったリーマン多様体の位相構造などに関する定理は非常にたくさんある．これは，真面目にリーマン幾何の本を一冊読まなくてはならない．さらに，現代リーマン幾何ともいうべき Gromov 以降（1980 ぐらい-現在）の話でも，このような定理の一般系はたくさんある．上で述べた命題は，もっとも古典的な（1940 ぐらい-60 ぐらいまで）消滅定理である．

$\Lambda^p(M)$ 上での消滅定理を述べる．リーマン曲率を $R : \Lambda^2(M) \to \Lambda^2(M)$ とみなる．これは対称変換であった．そこで各点でその固有値を考えることができる．**リーマン曲率 R が正とは，すべての点での固有値が負であることと定義する**．

Remark 7.4. 上で固有値を負としているが，それは

$$R : \Lambda^2(M) \ni e_i \wedge e_j \mapsto \frac{1}{2} \sum R_{ijkl} e_k \wedge e_l \in \Lambda^(M)$$

と定義したからである．固有値を正としたければ，この定義にマイナスをつければよい．

Proposition 7.8 (Gallot-Meyer (1975)). (M, g) を n 次元コンパクトリーマン多様体でリーマン曲率がすべての点で非負で，ある点で正とする．このとき $p = 1, \cdots, n-1$ までのベッチ数は零である．つまり (M, g) はホモロジー球面.

Proof. 証明の方法は $\Lambda^1(M)$ 上の話と全く同様である．証明すべきはリーマン曲率が正のときに,

$$\mathfrak{R} := \frac{1}{16}\sum_{ijkl} R_{ijkl}[e_ie_j, [e_ke_l, \phi]]$$

が正の作用素であることである．つまり $\langle \mathfrak{R}\phi, \phi\rangle > 0$（$\phi \neq 0$）を証明する．式 (7.1) を使って

$$\begin{aligned}
\langle \mathfrak{R}\phi, \phi\rangle =& \langle \frac{1}{16}\sum_{ijkl} R_{ijkl}[e_ie_j, [e_ke_l, \phi]], \phi\rangle \\
=& \frac{1}{16}\sum_{ijkl}\langle [e_ie_j, R_{ijkl}[e_ke_l, \phi]], \phi\rangle \\
=& -\frac{1}{16}\sum_{ijkl} R_{ijkl}\langle [e_ke_l, \phi], [e_ie_j, \phi]\rangle \\
=& -\frac{1}{4}\sum_{i<j,k<l} R_{ijkl}\langle [e_ke_l, \phi], [e_ie_j, \phi]\rangle
\end{aligned}$$

となる．上の式は正規直交基底のとり方によらない式であるので，我々は点 x で $R : \Lambda^2(M) \to \Lambda^2(M)$ の固有ベクトルとして $e_i \wedge e_j$ をとることができる．つまり

$$R(e_i, e_j) = \frac{1}{2}\sum R_{ijkl}e_k \wedge e_l = \lambda_{ij}e_i \wedge e_j, \quad i < j,\ \lambda_{ij} < 0$$

としてよい．よって

$$\langle \mathfrak{R}\phi, \phi\rangle = \frac{1}{4}\sum_{i<j}(-\lambda_{ij})|[e_ie_j, \phi]|^2$$

となる．ここで，すべての $i < j$ に対して $[e_ie_j, \phi] = 0$ となってしまったら消滅定理が成立しない．もし，すべての $i < j$ に対して $[e_ie_j, \phi] = 0$ とする．このとき ϕ が張る空間は自明表現であるが，我々は $\Lambda^p(M)$（$p = 1, \cdots, n-1$）としているので，$\phi = 0$ となってしまう.

以上から命題が証明できた. ■

7.4 共形キリング作用素と固有値評価

スピノール束上のディラック作用素と対になってツイスター作用素が現れた．そして，ディラック作用素の固有値評価をすることができた.

ではホッジ-ラプラシアンまたは外微分 d, 余微分 d^* に対になって現れる作用素は何であろうか？それは共形キリング作用素 C である．そして $\ker C$ は共形キリング微分形式の空間である．

キリングベクトル場の一般化として共形キリングベクトル（共形変換の無限小版）が，古典的に調べられた（矢野健太郎など）．さらに，その一般化としてキリング微分形式と共形キリング微分形式が調べられた．共形ベクトル場に対しては古典的であるが，いろいろと面白い結果がある．しかし共形キリング微分形式に対しては，それほど発展はしなかった．最近になってスピン幾何学者である U. Semmelmann などが再び研究している（G_2 構造や四元数ケーラー構造などと共形キリング微分形式の関係．しかし，それほど目新しい結果はないように思う）．

ここでは共形キリング作用素に関する基本的な事柄を学び，ホッジ-ラプラシアンの固有値評価などについて述べる．やり方はツイスター作用素のときと同じである．以下では，$T^*(M) = T(M)$ とリーマン計量によって同一視して考えてる．また，ホッジ作用素による $\Lambda^p(M) \simeq \Lambda^{n-p}(M)$ により $p \leq [n+1/2]$ と仮定する．

次の補題は役立つ．

Lemma 7.9. $\Lambda^p(M)$ 上で次が成立

$$\sum e_i \wedge \iota(e_i) = p\mathrm{id}, \quad \sum \iota(e_i) e_i \wedge = (n-p)\mathrm{id}$$

Proof. $\phi \in \Lambda^p(M)$ を $\phi = e_1 \wedge \cdots \wedge e_p$ として計算すればよい．まず

$$\sum e_i \wedge \iota(e_i)(e_1 \wedge \cdots \wedge e_p) = pe_1 \wedge \cdots e_p$$

となる．そこで $\iota(v)u \wedge + u \wedge \iota(v) = \langle u, v \rangle$ を使って，

$$\sum \iota(e_i) e_i \wedge \phi = \sum (-e_i \wedge \iota(e_i) + 1)\phi = (n-p)\phi$$

となる． ■

まず，次の二つの写像を考える

$$\Pi_{p+1} : \Lambda^p(M) \otimes T(M) \ni \phi \otimes v \mapsto v \wedge \phi \in \Lambda^{p+1}(M),$$
$$\Pi_{p-1} : \Lambda^p(M) \otimes T(M) \ni \phi \otimes v \mapsto \iota(v)\phi \in \Lambda^{p+1}(M).$$

$\Pi_{p+1} \circ i_{p+1} = \mathrm{id}$, $\Pi_{p-1} \circ i_{p-1} = \mathrm{id}$ となる写像を求めると，

$$i_{p+1} : \Lambda^{p+1}(M) \ni \phi \mapsto \frac{1}{p+1} \sum i(e_i)\phi \otimes e_i \in \Lambda^p(M) \otimes T(M)$$
$$i_{p-1} : \Lambda^{p-1}(M) \ni \phi \mapsto \frac{1}{n-p+1} \sum e_i \wedge \phi \otimes e_i \in \Lambda^p(M) \otimes T(M)$$

となる．

Proof. 補題から

$$\Pi_{p+1}(\sum i(e_i)\phi \otimes e_i) = \sum e_i \wedge i(e_i)\phi = (p+1)\phi$$
$$\Pi_{p-1}(\sum e_i \wedge \phi \otimes e_i) = (n-(p-1))\phi = (n-p+1)\phi$$

となる. ■

以上から $\Lambda^p(M) \otimes T(M)$ **には** $\Lambda^{p+1}(M)$ **及び** $\Lambda^{p-1}(M)$ **が既約成分として含まれる**ことがわかる．$\Lambda^0(M)$，$\Lambda^n(M)$，$\Lambda^m(M)$（for $n = 2m$）などの特別な場合には多少異なる．それらの場合わけは面倒なので述べない（練習問題）.

Proposition 7.10. 次の同伴束としての既約分解が成立する.

$$\Lambda^p(M) \otimes T(M) = \Lambda^{p,1}(M) \oplus \Lambda^{p+1}(M) \oplus \Lambda^{p-1}(M)$$

ここで $\Lambda^{p,1}(M)$ **は** ***highest weight*** $(2, 1_{p-1}, 0_{m-p})$ **となる既約表現に対応した同伴ベクトル束**．さらに $\Lambda^{p,1}(M)$ への射影は

$$\begin{aligned}\Pi_C :&\Lambda^p(M) \otimes T(M) \ni \phi \otimes v \\ &\mapsto \phi \otimes v - \frac{1}{p+1}\sum i(e_i)v \wedge \phi \otimes e_i - \frac{1}{n-p+1}\sum e_i \wedge i(v)\phi \otimes e_i \in \Lambda^{p,1}(M)\end{aligned}$$

となる.

Proof. 証明はツイスター束のときと同様である. ■

そこで

Definition 7.1. 共変微分

$$\nabla : \Gamma(\Lambda^p(M)) \to \Gamma(\Lambda^p(M) \otimes T^*(M)) = \Gamma(\Lambda^p(M) \otimes T(M))$$

と射影 Π_C を合成することにより

$$C(\phi) := \Pi_C(\sum \nabla_{e_i}\phi \otimes e_i) = \sum(\nabla_{e_i}\phi - \frac{1}{p+1}i(e_i)d\phi + \frac{1}{n-p+1}e_i \wedge d^*\phi) \otimes e_i$$

という一階微分作用素を得る．これを**共形キリング作用素**とよぶ．そして $\phi \in \ker C$ となる元を**共形キリング微分形式**とよぶ．これは次と同値

$$\nabla_X\phi - \frac{1}{p+1}i(X)d\phi + \frac{1}{n-p+1}X \wedge d^*\phi = 0, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

次に共形キリング作用素の形式的随伴作用素 C^* を求めよう．$\phi = \sum \phi_i \otimes e_i \in \Lambda^{p,1}(M)$ とは，$\sum e_i \wedge \phi_i = 0$, $\sum \iota(e_i)\phi_i = 0$ となるものである．

$$
\begin{aligned}
\langle C\psi, \phi\rangle &= \sum_{i,j} \langle (\nabla_{e_i}\psi - \frac{1}{p+1} i(e_i)d\psi + \frac{1}{n-p+1} e_i \wedge d^*\psi) \otimes e_i, \phi_j \otimes e_j\rangle \\
&= \sum_i \langle \nabla_{e_i}\psi, \phi_i\rangle - \frac{1}{p+1}\sum_i \langle i(e_i)d\psi, \phi_i\rangle + \frac{1}{n-p+1}\sum_i \langle e_i \wedge d^*\psi, \phi_i\rangle \\
&= \sum_i e_i\langle \psi, \phi_i\rangle - \sum_i \langle \psi, \nabla_{e_i}\phi_i\rangle
\end{aligned}
$$

なので C **の形式的随伴作用素は** $C^*(\phi) = -\sum \nabla_{e_i}\phi_i$ **となる**．

そこで C^*C を計算する．

$$
\begin{aligned}
C^*C\phi =& -\sum \nabla_{e_i}(\nabla_{e_i}\phi - \frac{1}{p+1} i(e_i)d\phi + \frac{1}{n-p+1} e_i \wedge d^*\phi) \\
=&\nabla^*\nabla\phi - \frac{1}{p+1} d^*d\phi - \frac{1}{n-p+1} dd^*\phi \\
=&(d^*d + d^*d - \mathfrak{R}) - \frac{1}{p+1} d^*d\phi - \frac{1}{n-p+1} dd^*\phi \\
=& -\mathfrak{R} + \frac{p}{p+1} d^*d\phi + \frac{n-p}{n-p+1} dd^*\phi
\end{aligned}
$$

となる．

Proposition 7.11 (**最適ボホナーワイゼンベック公式**). 向きつきリーマン多様体上の $\Lambda^p(M)$ を考える．このベクトル束上の外微分 d，余微分 d^*，共形キリング作用素 C は次をみたす

$$
\begin{aligned}
C^*C + \frac{1}{p+1} d^*d + \frac{1}{n-p+1} dd^* &= \nabla^*\nabla, \\
-C^*C + \frac{p}{p+1} d^*d + \frac{n-p}{n-p+1} dd^* &= \mathfrak{R}.
\end{aligned}
$$

つぎの系はすぐわかる．

Corollary 7.12. $\phi \in \Lambda^p(M)$ を共形キリング *p-form* とする．このとき $*\phi$ は共形キリング $(n-p)$-*form* である．

この命題から，ホッジ-ラプラシアンの固有値評価をすることができる．$p \leq [(n+1)/2]$ なので

$$
\begin{aligned}
d^*d + d^*d =& \frac{n-p+1}{n-p}(\frac{n-p}{n-p+1} d^*d + \frac{n-p}{n-p+1} dd^*) \\
\geq& \frac{n-p+1}{n-p}(\frac{p}{p+1} d^*d + \frac{n-p}{n-p+1} dd^*) \\
=& \frac{n-p+1}{n-p}(C^*C + \mathfrak{R}) \geq \frac{n-p+1}{n-p}\mathfrak{R}
\end{aligned}
$$

となる．よって$\mathfrak{R}$が適当な条件のもとで固有値評価をすることが可能である．[9]を参照．固有値評価において等号成立を考えても，$\mathfrak{R}$の条件がきつ過ぎることもあった，それほど面白くない．面白いのは次の場合である．

$\Lambda^1(M)$なら

$$d^*d + d^*d \geq \frac{n}{n-1}Ric$$

となるので，$Ric \geq (n-1)r > 0$なら固有値は$\lambda \geq nr$となる．さらに等号が成立する1-formは$\phi \in \ker C$かつ$\phi \in \ker d$となる．また関数fで$\Delta f = d^*df = \lambda f$となるものに対して$df \in \Lambda^1(M)$は$\Delta df = \lambda df$を満たす．よって$\lambda \neq 0$なら$\lambda \geq nr$となる．

Proposition 7.13 (Lichnerowicz). (M, g)をコンパクトリーマン多様体で$Ric \geq (n-1)r > 0$とする．関数空間上のラプラシアンに関して零でない固有値λは$\lambda \geq nr > 0$を満たす.

Remark 7.5. 関数の場合には0固有値（定数関数が固有ベクトル）が必ず存在する．また，**等号が成立する多様体が定曲率rの球面になる**ことが知られている（小畠の定理）．これについては，例えば酒井「リーマン幾何学」などをみよ．この小畠の定理のディラック作用素版がキリングスピノールをもつ多様体の分類なのであった.

7.5 共形キリング微分形式と共形キリングベクトル場

共形キリング微分形式と共形ベクトル場について，いくつか基本的な性質を述べよう.

ツイスター作用素の共形共変性をディラック作用素の共形共変性から導いた．同様に，d, d^*の共形共変性からCの共形共変性を導くことができる（演習問題）.

Proposition 7.14. 共形キリング作用素Cは，共形共変一階微分作用素である．共形重みは-1である.

Remark 7.6. 体積の共形変形を考慮すればC^*も共形共変一階微分作用素であることがわかる.

さて，$\Lambda^1(M)$上で$\ker C$を考える．計量によって$\Lambda^1(M) = T(M)$とみなす．そこで$\ker C$に入るベクトル場を**共形キリングベクトル場**（または共形ベクトル場）と呼ぶ．これはキリングベクトル場の一般化である.

Proposition 7.15. Xをベクトル場とする．このとき次は同値である.

1. Xは$\ker C$に入る．つまり共形キリングベクトル場.

2. X は次を満たす．ここで X^* は X に対応する 1-*form*

$$\nabla_Y X - \frac{1}{2}i(Y)dX^* - \frac{1}{n}div(X)Y = 0, \quad \forall Y$$

3. X は次を満たす

$$g(\nabla_Y X, Z) + g(\nabla_Z X, Y) = \frac{2}{n}div(X)g(Y,Z), \quad \forall Y, Z$$

4. ある関数 λ が存在して

$$L_X g = 2\lambda g.$$

5. X が生成する，局所 1 パラメータ変換群を ϕ_t と書けば $\phi_t^* g = f_t(x)g$ となる．つまり ϕ_t は**共形変換**である．

さらに，λ は $\lambda(x) = \frac{1}{n}div(X)$ となる．また

$$f_t(x) = \exp(\int_0^t 2\lambda(\phi_s(x))ds), \quad 2\lambda = \frac{df_t(x)}{dt}|_{t=0}$$

となる．この λ を X に対する**特性関数**とよぶ．

Proof. (1) と (2) の同値は定義から明らか．X が (2) を満たすとする．つまり

$$\nabla_Y X - \frac{1}{2}i(Y)dX^* - \frac{1}{n}div(X)Y = 0, \quad \forall Y$$

である．添え字を使って書いてみると，$X = \sum X^i e_i$, $Y = e_j$ として

$$\frac{1}{2}\sum(e_j X^i)e_i + \frac{1}{2}\sum_k(e_k X^j)e_k = \frac{1}{n}(\sum_i e_i X^i)e_j$$

とも書ける．さて (2) から X は

$$g(\nabla_Y X, Z) - \frac{1}{2}g(i(Y)dX^*, Z) + \frac{1}{n}div(X)g(Y,Z) = 0$$

を満たす．$g(i(Y)dX^*, Y) = dX^*(Y,Z)$ であるので，Y, Z を入れ変えたものを足せば

$$g(\nabla_Y X, Z) + g(\nabla_Z X, Y) = \frac{2}{n}div(X)g(Y,Z)$$

となるので (2) から (3) がわかる．逆に，(3) を満たすベクトル場 $X = \sum X^i e_i$ が存在すれば，

$$(e_k X^l) + (e_l X^k) = \frac{2}{n}\sum(e_i X^i)\delta_{kl}$$

となるので，e_k をかけて足し合わせれば

$$\sum(e_k X^l)e_k + \sum(e_l X^k)e_k = \frac{2}{n}(\sum e_i X^i)e_k$$

となり (3) から (2) が証明できた．

次に (3) と (4) が同値であることを証明しよう．(4) を仮定すると

$$\begin{aligned}2\lambda g(Y,Z) =&(L_X g)(Y,Z) = Xg(Y,Z) - g([X,Y],Z) - g(Y,[X,Z])\\ =&g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) - g(\nabla_X Y - \nabla_Y X, Z) - g(Y, \nabla_X Z - \nabla_Z X)\\ =&g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X)\end{aligned}$$

となる．$X = \sum X^i e_i$, $Y = e_k$, $Z = e_l$ とすれば

$$2\lambda\delta_{kl} = (e_k X^l) + (e_l X^k)$$

となるので，k, l について和をとれば $2n\lambda = 2div(X)$ となる．このように λ は $div(X)/n$ となる．以上から (3) と (4) が同値であることがわかる．

(5) から (4) は，単に微分すればわかる．(4) から (5) はキリングベクトル場の 1 パラメータ変換群が等長変換を与えることと同じ方法で証明すればよい．例えば松島「多様体入門」などをみよ．ここでは f と λ の対応だけ述べる．(5) における関数 $f_t(x)$ は，

$$\begin{aligned}f_{t+s}(x)g_x(u,v) &= (\phi^*_{t+s}g)_x(u,v) = (\phi^*_s(\phi^*_t g))_x(u,v)\\ &= (\phi^*_t g)_{\phi_s(x)}(\phi_{s*}u, \phi_{s*}v)\\ &= f_t(\phi_s(x))g_{\phi_s(x)}(\phi_{s*}u, \phi_{s*}v)\\ &= f_t(\phi_s(x))f_s(x)g_x(u,v)\end{aligned}$$

となり，$f_{t+s}(x) = f_t(\phi_s(x))f_s(x)$ を満たす．これを t について微分すると，

$$\left.\frac{df(t,x)}{dt}\right|_{t=s} = 2\lambda(\phi_s(x))f_s(x)$$

となるので，$\lambda(x)$ が与えられていて上の方程式を満たす $f_t(x)$ は

$$f_t(x) = \exp(\int_0^t 2\lambda(\phi_s(x))ds)$$

となる． ■

上の命題から，共形キリングベクトル場はキリングベクトル場の一般化であることがわかる（**λ が零のときがキリングベクトル場**）．

Corollary 7.16. (M, g) をコンパクトリーマン多様体とする．また X を共形キリングベクトル場とする．X の特性関数 λ が定数なら，$\lambda = 0$ となる．つまり X はキリングベクトル場である．

Proof. 向きがついてなくてもよい．話しは局所的な話なので，二重被覆を取って向きがあると仮定してよい．λ が定数なら $dd^*X^* = ddiv(X) = nd\lambda = 0$ となる．多様体がコンパクトなので $(dd^*X^*, X^*) = (d^*X^*, d^*X^*) = 0$ から $d^*X^* = div(X) = 0$ となるので $\lambda = 0$ である． ■

次も明らか.

Corollary 7.17. X を共形キリングベクトル場として $div(X)=0$（または $d^*X^*=0$）とすれば X はキリングベクトル場である．**よってキリングベクトル場は** $\ker C\cap\ker d^*$ **として特徴づけられる**.（コンパクトでなくてもよい）.

キリングベクトル場は等長変換群のリー群であった．ボホナーワイゼンベック公式の応用として，リッチ曲率と等長変換群に関する結果を述べておく.

Proposition 7.18. (M,g) を**コンパクト**リーマン多様体とする

1. **リッチ曲率が負なら，キリングベクトル場は零しかない．よって等長変換群は有限群**.
2. **リッチ曲率が非正**なら，キリングベクトル場と平行ベクトル場は一致する．そして**等長変換群の単位元連結成分はトーラス**である.
3. **リッチが零**なら．**キリングベクトル場の次元は** $b_1(M)$ **に一致**する.

Proof. X をキリングベクトル場とする．これを 1-from と同一視しておく．ボホナーワイゼンベック公式を書けば

$$C^*C+\frac{1}{2}d^*d+\frac{1}{n}dd^*=\nabla^*\nabla,\quad -C^*C+\frac{1}{2}d^*d+\frac{n-1}{n}dd^*=Ric$$

である．$X\in\ker C\cap\ker d^*$ であるので,

$$d^*dX=2\nabla^*\nabla X,\quad d^*dX=2Ric(X)$$

よって

$$\|\nabla X\|^2=\int_M Ric(X,X)vol$$

が成立する．$X\neq 0$ として Ric が負なら $0\leq\|\nabla X\|<0$ となるので矛盾する．よって Ric が負なら $X=0$ が成立する.

$Ric\leq 0$ とすれば $0\leq\|\nabla X\|\leq 0$ となるので $\nabla X=0$ である．もちろん平行ベクトルはキリングベクトル場である．さらに，このとき $[X,Y]=\nabla_XY-\nabla_YX=0$ であるので等長変換群のリー環は可換である．また**リーマン多様体がコンパクトなら等長変換群はコンパクト群である**ことが知られている（下の remark 参照）．よって等長変換群の単位元連結成分はコンパクト可換群であるのでトーラス群になる.

$Ric=0$ なら平行ベクトル場とキリングベクトル場は一致する．一方 $Ric=0$ なら調和 1-form と平行 1-form の空間は一致した．よってキリングベクトル場の次元と $b_1(M)$ は一致する.（さらに，$b_1(M)=n$ なら，M は平坦トーラスになるのであった）. ■

Remark 7.7. 正規直交フレーム束 $\mathbf{O}(M)$ の点 p を一つ固定する．また等長変換群を $I(M,g)$ とかく．$\phi \in I(M,g)$ に対して ϕ_* は $\mathbf{O}(M)$ の主束同型を引き起こす．そこで $i : I(M,g) \ni \phi \mapsto \phi_*(p) \in \mathbf{O}(M)$ とすれば，単射であり $I(M,g)$ は $\mathbf{O}(M)$ の閉部分多様体になる．M をコンパクトとすればファイバー $O(n)$ もコンパクトなので $\mathbf{O}(M)$ はコンパクト．よって，等長変換群 $I(M,g)$ もコンパクトである．

キリングベクトル場の全体はベクトル場の中で部分リー環となった．また等長変換はこのリー環の同型写像を与える．これと同様のことが共形キリングベクトル場についても成立する．証明はキリングベクトル場の時と同様である．

Proposition 7.19. **共形キリングベクトル場の全体はベクトル場のリー環の部分リー環**である．X,Y の特性関数を λ, μ とすれば $[X,Y]$ の特性関数は $X(\mu)-Y(\lambda)$ である．また共形変換は，この部分リー環の環同型写像を与える．

キリングベクトル場のリー環の次元が，多様体が**コンパクトでなくても**$\frac{1}{2}n(n+1)$ 以下であることが知られている（後で証明する．または小林-野水など）．同様のことが共形キリングベクトル場についても成立する．

Proposition 7.20.

1. 多様体がコンパクトなら共形キリングベクトル場のリー環の次元は有限次元である．

2. $n>2$ **のとき** n **次元多様体の共形キリングベクトル場のリー環の次元は** $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ **以下**である．

Proof. 最初の主張は C^*C が楕円型作用素であることから従う．二番目の主張は，後で証明する（$\Lambda^p(M)$ 上で $\ker C$ が有限次元であることを証明する）． ■

Remark 7.8. この命題で注意すべきは 2 番目の主張は $n>2$ としていることである．$n=2$ **の場合**には共形構造は複素構造であるので，共形変換は正則変換になる．この場合には正則変換のリー環（正則ベクトル場のリー環）は**無限次元リー環**となるのである．それが，共形場理論において無限次元リー環が現れる理由である．$n \geq 3$ なら高次元共形場理論を行おうとしても無限の対称性は現れないので面白くない．この現象はツイスタースピノールに対しても成立した．

Example 7.2. 球面の共形変換の次元は $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ となる．$n+1$ 次元双曲空間 H^{n+1} の等長変換群は $O^+(n+1,1)$ であったが，H^{n+1} の円盤モデル

$$B^{n+1}, \quad g = \frac{4}{(1-|x|^2)^2}\sum_{i=0}^{n}(dx^i)^2$$

を考えて，等長変換群を境界 S^n へ拡張すると，S^n の共形変換になる．$\dim O^+(n+1,1) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ であり，一方で共形変換の次元は $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ 以下であるので，$O^+(n+1,1)$ が S^n の共形変換全体を与える．

以上で共形キリングベクトル場の基本的性質を述べたが，共形キリングベクトル場に対しては古典的であるが様々なことが知られている．例えば「conformal deformaions of Riemannian manifold」（Weber and Goldberg.1969）[18] などを見よ．また相対性理論との関係の論文もいくつかある．

次に共形キリング微分形式に関する基本的な性質を述べよう．

共形キリングベクトル場 X が co-closed のときキリングベクトル場になった．そこで，

Definition 7.2. 共形キリング微分形式 ϕ が co-closed $d^*\phi = 0$ のとき，ϕ を**キリング微分形式**と呼ぶ.

共形キリング微分形式の微分幾何学における役割については「conformal Killing forms on Riemannian manifolds」Semmelmann (Math. Z) [15] とそこに載ってる参考文献を参照にするとよい．我々は $\ker C$ の有限次元性とスピノールとの関係についてのみ触れる．([15] から引用している）.

Proposition 7.21. (M, g) を連結多様体とする．このとき $\Lambda^p(M)$ 上で $\ker C$ の次元は次で抑えられる

$$\ker C \leq \binom{n+2}{p+1}.$$

また球面の場合に等号が成立する（逆はわからない）．また多様体はコンパクトでなくてもよいことに注意.

以下で，この命題を証明する．

Lemma 7.22. ϕ を共形キリング *p-form* とする．このとき次が成立する

$$\nabla_X d\phi = \frac{p+1}{p} R^+(X)\phi + \frac{p+1}{p(n-p+1)} X \wedge dd^*\phi \tag{7.2}$$

$$\nabla_X d^*\phi = -\frac{n-p+1}{n-p} R^-(X)\phi + \frac{1}{p} i(X) dd^*\phi - \frac{n-p+1}{p(n-p)} i(X)\mathfrak{R}\phi \tag{7.3}$$

ここで $R^+(X) = \sum e_i \wedge R(X, e_i)$, $R^-(X) = \sum i(e_i)R(X, e_i)$ である．

Proof. ϕ が共形キリングであるので，

$$\mathfrak{R}\phi = \frac{p}{p+1} d^*d\phi + \frac{n-p}{n-p+1} dd^*\phi$$

を満たす．さて，

いつものように $(\nabla e_i)_x = 0$ として証明する．

$$\nabla_{e_i}\phi - \frac{1}{p+1} i(e_i) d\phi + \frac{1}{n-p+1} e_i \wedge d^*\phi = 0$$

に ∇_{e_j} をあてると，

$$\nabla_{e_j}\nabla_{e_i}\phi-\frac{1}{p+1}i(e_i)(\nabla_{e_j}d\phi)+\frac{1}{n-p+1}e_i\wedge(\nabla_{e_j}d^*\phi)=0$$

よって

$$R(e_i,e_j)\phi-\frac{1}{p+1}i(e_i)(\nabla_{e_j}d\phi)-i(e_j)(\nabla_{e_i}d\phi)+\frac{1}{n-p+1}(e_i\wedge(\nabla_{e_j}d^*\phi)-e_j\wedge\nabla_{e_i}d^*\phi)=0$$

ここで $i(e_i)$ をかけて和ととれば

$$\begin{aligned}
&\sum i(e_i)R(e_i,e_j)\phi\\
=&\sum i(e_i)\frac{1}{p+1}i(e_i)(\nabla_{e_j}d\phi)-i(e_j)(\nabla_{e_i}d\phi)-\sum i(e_i)\frac{1}{n-p+1}(e_i\wedge(\nabla_{e_j}d^*\phi)-e_j\wedge\nabla_{e_i}d^*\phi)\\
=&\frac{1}{p+1}\sum i(e_j)i(e_i)(\nabla_{e_i}d\phi)-\nabla_{e_j}d^*\phi+\frac{1}{n-p+1}\sum(-e_j\wedge i(e_i)+\delta_{ij})\nabla_{e_i}d^*\phi\\
=&-\frac{1}{p+1}i(e_j)d^*d\phi-\nabla_{e_j}d^*\phi+\frac{1}{n-p+1}\nabla_{e_j}d^*\phi\\
=&-\frac{1}{p+1}i(e_j)d^*d\phi-\frac{n-p}{n-p+1}\nabla_{e_j}d^*\phi\\
=&-\frac{1}{p+1}i(e_j)(\frac{p+1}{p}\mathfrak{R}\phi-\frac{(p+1)(n-p)}{p(n-p+1)}dd^*\phi)-\frac{n-p}{n-p+1}\nabla_{e_j}d^*\phi\\
=&-i(e_j)\frac{1}{p}\mathfrak{R}\phi+i(e_i)\frac{(n-p)}{p(n-p+1)}dd^*\phi-\frac{n-p}{n-p+1}\nabla_{e_j}d^*\phi
\end{aligned}$$

よって (7.3) が証明できた．(7.2) も同様である． ■

次に $\nabla_X dd^*\phi$ を計算する．∇ の分解は

$$\nabla_X\psi=\frac{1}{p+1}i(X)d\psi-\frac{1}{n-p+1}X\wedge d^*\psi+C(\psi)$$

であったので，$\nabla_X dd^*\phi$ を計算するには $C(dd^*\phi)$ が求まればよいことになる．これを計算するためにいくつかの作用素を導入する．

$\phi\in\Lambda^p(M)$ とする．このとき $\nabla^2\phi\in T(M)\otimes T(M)\otimes\Lambda^p(M)$ である．そこで射影

$$\begin{aligned}
pr_1^+:\Lambda^p(M)\otimes T(M)\otimes T(M)\ni\phi\otimes u\otimes v&\mapsto\Pi_C((u\wedge\phi)\otimes v)\in\Lambda^{p+1,1}(M)\\
pr_2^+:\Lambda^p(M)\otimes T(M)\otimes T(M)\ni\phi\otimes u\otimes v&\mapsto pr(v\otimes\Pi_C(\phi\otimes u))\in\Lambda^{p+1,1}(M)\\
\pi^+:\Lambda^p(M)\otimes T(M)\otimes T(M)\ni\phi\otimes u\otimes v&\mapsto\Pi_C\sum_i e_i\wedge\phi\otimes i(e_i)(u\wedge v)\in\Lambda^{p+1,1}(M)
\end{aligned}$$

を考える．ここで pr は次の射影である．

$$pr:\Lambda^{p,1}(M)\otimes T(M)\mapsto\Lambda^{p+1,1}(M)$$

Proof. 上の射影の具体的な表示及び well-defined を確かめる．まず pr_1^+ を具体的表示すると

$$\Pi_C((u\wedge\phi)\otimes v)=u\wedge\phi\otimes v-\frac{1}{p+2}\sum i(e_i)v\wedge u\wedge\phi\otimes e_i-\frac{1}{n-p}\sum e_i\wedge i(v)u\wedge\phi\otimes e_i$$

となる．

次に pr_2^+ を考える．pr は具体的には次のようになる．$\phi=\sum\phi_i\otimes e_i\in\Lambda^{p,1}(M)$ とすれば,

$$pr(\phi\otimes v)=\sum_i(v\wedge\phi_i)\otimes e_i-\frac{1}{n-p}\sum_{ij}(v,e_i)e_j\wedge\phi_i\otimes e_j\in\Lambda^{p+1,1}(M)$$

となる．実際

$$\begin{aligned}&\sum_i e_i\wedge v\wedge\phi_i-\sum_{ij}(v,e_i)e_j\wedge e_j\phi_i=0,\\&\sum_i i(e_i)\wedge v\wedge\phi_i-\frac{1}{n-p}\sum_{ij}(v,e_i)i(e_j)e_j\wedge\phi_i=\sum(v,e_i)\phi_i-\sum(v,e_i)\phi_i=0\end{aligned}$$

となるので $pr(\phi\otimes v)\in\Lambda^{p+1,1}(M)$ となる．

よって pr_2^+ の具体的な表示は

$$\begin{aligned}&pr_2^+(\phi\otimes u\otimes v)\\=&pr\Big(\Big(\sum_i((u,e_i)\phi-\frac{1}{p+1}i(e_i)u\wedge\phi-\frac{1}{n-p+1}e_i\wedge i(u)\phi)\otimes e_i\Big)\otimes v\Big)\\=&\sum_i v\wedge\{(u,e_i)\phi-\frac{1}{p+1}i(e_i)u\wedge\phi-\frac{1}{n-p+1}e_i\wedge i(u)\phi\}\otimes e_i\\&-\frac{1}{n-p}\sum_{ij}(v,e_i)e_j\wedge\{(u,e_i)\phi-\frac{1}{p+1}i(e_i)u\wedge\phi-\frac{1}{n-p+1}e_i\wedge i(u)\phi\}\otimes e_j\\=&v\wedge\phi\otimes u+\frac{1}{p+1}\sum_j i(e_j)v\wedge u\wedge\phi\otimes e_j-\frac{1}{p+1}u\wedge\phi\otimes v+\frac{1}{n-p+1}\sum_j e_j\wedge v\wedge i(u)\phi\otimes e_j\\&-\frac{1}{n-p}(u,v)\sum_j e_j\wedge\phi\otimes e_j+\frac{1}{(n-p)(p+1)}\sum_j e_j\wedge i(v)u\wedge\phi\otimes e_j\\&+\frac{1}{(n-p)(n-p+1)}\sum_j e_j\wedge v\wedge i(u)\phi\otimes e_j\\=&v\wedge\phi\otimes u+\frac{1}{p+1}\sum_j i(e_j)v\wedge u\wedge\phi\otimes e_j-\frac{1}{p+1}u\wedge\phi\otimes v+\frac{1}{n-p}\sum_j e_j\wedge v\wedge i(u)\phi\otimes e_j\\&-\frac{1}{n-p}(u,v)\sum_j e_j\wedge\phi\otimes e_j+\frac{1}{(n-p)(p+1)}\sum_j e_j\wedge i(v)u\wedge\phi\otimes e_j\end{aligned}$$

最後に π^+ の具体的表示を求める.

$$\sum e_i \wedge \phi \otimes i(e_i)u \wedge v = u \wedge \phi \otimes v - v \wedge \phi \otimes u$$

であるので，これに Π_C を当てると，

$$\begin{aligned}
&\pi^+(\phi \otimes u \otimes v) \\
=&u \wedge \phi \otimes v - \frac{1}{p+2}\sum i(e_i)v \wedge u \wedge \phi \otimes e_i - \frac{1}{n-p}\sum e_i \wedge i(v)u \wedge \phi \otimes e_i \\
&- v \wedge \phi \otimes u + \frac{1}{p+2}\sum i(e_i)u \wedge v \wedge \phi \otimes e_i + \frac{1}{n-p}\sum e_i \wedge i(u)v \wedge \phi \otimes e_i \\
=&u \wedge \phi \otimes v - v \wedge \phi \otimes u - \frac{2}{p+2}\sum i(e_i)v \wedge u \wedge \phi \otimes e_i - \frac{1}{n-p}\sum e_i \wedge i(v)u \wedge \phi \otimes e_i \\
&+ \frac{1}{n-p}\sum e_i \wedge i(u)v \wedge \phi \otimes e_i
\end{aligned}$$

■

上の証明における具体的な表示から pr_2^+, pr_1^+, π^+ の関係がわかる.

$$\begin{aligned}
&(pr_2^+ - \frac{p}{p+1}pr_1^+)(\phi \otimes u \otimes v) \\
=&v \wedge \phi \otimes u + \frac{1}{p+1}\sum_j i(e_j)v \wedge u \wedge \phi \otimes e_j - \frac{1}{p+1}u \wedge \phi \otimes v + \frac{1}{n-p}\sum_j e_j \wedge v \wedge i(u)\phi \otimes e_j \\
&- \frac{1}{n-p}(u,v)\sum_j e_j \wedge \phi \otimes e_j + \frac{1}{(n-p)(p+1)}\sum_j e_j \wedge i(v)u \wedge \phi \otimes e_j \\
&- \frac{p}{p+1}u \wedge \phi \otimes v + \frac{p}{(p+1)(p+2)}\sum i(e_i)v \wedge u \wedge \phi \otimes e_i \\
&+ \frac{p}{(n-p)(p+1)}\sum e_i \wedge i(v)u \wedge \phi \otimes e_i \\
=&v \wedge \phi \otimes u - u \wedge \phi \otimes v + \frac{2}{p+2}\sum i(e_i)v \wedge u \wedge \phi \otimes e_i + \frac{1}{n-p}\sum e_i \wedge i(v)u \wedge \phi \otimes e_i \\
&- \frac{1}{n-p}\sum_j e_j \wedge i(u)v \wedge \phi \otimes e_j = -\pi^+(\phi \otimes u \otimes v)
\end{aligned}$$

つまり

$$\pi^+ + pr_2^+ = \frac{p}{p+1}pr_1^+$$

そこで ∇^2 とこれらの射影を合成すれば，

$$pr_1^+ \circ \nabla^2\phi = pr_1^+(\sum_{ij}\nabla_{e_j}\nabla_{e_i}\phi \otimes e_i \otimes e_j) = C(d\phi)$$

$$pr_2^+ \circ \nabla^2\phi = pr_2^+(\sum_{ij}\nabla_{e_j}\nabla_{e_i}\phi \otimes e_i \otimes e_j) = \theta^+(C\phi)$$

$$\pi^+ \circ \nabla^2 = \pi^+(\sum_{ij}\nabla_{e_j}\nabla_{e_i}\phi \otimes e_i \otimes e_j) = \sum R^+(e_k)\phi \otimes e_k + \frac{1}{n-p}\sum e_k \wedge \mathfrak{R}\phi \otimes e_k$$

ここで $\theta^+ := pr\circ\nabla : \Gamma(\Lambda^{p,1}(M)) \to \Gamma(\Lambda^{p+1,1}(M))$ としている．

Remark 7.9. $\pi^+\circ\nabla^2$ が曲率作用（束準同形）になることに注意．これは $u\wedge\phi\otimes v - v\wedge\phi\otimes u$ と交代化しているためである．

Proof. $\pi^+\circ\nabla^2$ を計算すればよい

$$
\begin{aligned}
&\pi^+\circ\nabla^2\phi = \\
=&\sum_{ij}\{e_i\wedge\nabla_{e_j}\nabla_{e_i}\phi\otimes e_j - e_j\wedge\nabla_{e_j}\nabla_{e_i}\phi\otimes e_i - \frac{2}{p+2}\sum i(e_k)e_j\wedge e_i\wedge\nabla_{e_j}\nabla_{e_i}\phi\otimes e_k \\
&-\frac{1}{n-p}\sum e_k\wedge i(e_j)e_i\wedge\nabla_{e_j}\nabla_{e_i}\phi\otimes e_k + \frac{1}{n-p}\sum e_k\wedge i(e_i)e_j\wedge\nabla_{e_j}\nabla_{e_i}\phi\otimes e_k\} \\
=&\sum_{ij}(\nabla_{e_j}d\phi\otimes e_j - e_j\wedge\nabla_{e_i}\nabla_{e_j}\phi\otimes e_i + e_j\wedge R(e_i,e_j)\phi\otimes e_i) + \frac{1}{n-p}\sum_k e_k\wedge d^*d\phi\otimes e_k \\
&-\frac{1}{n-p}\sum_{k,i,j} e_k\wedge e_j\wedge i(e_i)\nabla_{e_j}\nabla_{e_i}\phi\otimes e_k - \sum_k\frac{1}{n-p}\sum e_k\wedge\nabla^*\nabla\phi\otimes e_k \\
=&\sum_{ij} e_j\wedge R(e_i,e_j)\phi\otimes e_i) + \frac{1}{n-p}\sum_k e_k\wedge d^*d\phi\otimes e_k \\
&+\frac{1}{n-p}\sum_{k,i,j} e_k\wedge dd^*\phi\otimes e_k - \sum_k\frac{1}{n-p}e_k\wedge\nabla^*\nabla\phi\otimes e_k \\
=&\sum_k R^+(e_k)\phi\otimes e_k + \frac{1}{n-p}\sum e_k\wedge\mathfrak{R}\phi\otimes e_k
\end{aligned}
$$

■

よって

$$
C(d\phi) = \frac{p+1}{p}\theta^+(C\phi) + \frac{p+1}{p}\sum R^+(e_k)\phi\otimes e_k + \frac{p+1}{p(n-p)}\sum e_k\wedge\mathfrak{R}\phi\otimes e_k
$$

が成立する．

同様に $\phi\in\Lambda^p(M)$ に対して，

$$
C(d^*\phi) = -\frac{n-p+1}{n-p}\theta^-(C\phi) - \frac{n-p+1}{n-p}\sum_k R^-(e_k)\phi\otimes e_k - \frac{n-p+1}{p(n-p)}\sum i(e_k)\mathfrak{R}\phi\otimes e_k
$$

となる．ここで $\theta^- = pr\circ\nabla : \Gamma(\Lambda^{p,1}(M)) \to \Gamma(\Lambda^{p-1,1}(M))$ である．

さて話を元に戻そう．我々が計算すべきは $\phi\in\ker C\subset\Gamma(\Lambda^p(M))$ に対する $\nabla_X dd^*\phi = C(dd^*\phi)$ であった．

$$
C(dd^*\phi) = \frac{p}{p-1}\theta^+(Cd^*\phi) + \frac{p}{p-1}\sum R^+(e_k)d^*\phi\otimes e_k + \frac{p}{(p-1)(n-p+1)}\sum e_k\wedge\mathfrak{R}d^*\phi\otimes e_k
$$

この式の $\theta^+(Cd^*\phi)$ を考えると，

$$
\begin{aligned}
\theta^+(Cd^*\phi) = \theta^+\{&-\frac{n-p+1}{n-p}\sum_k R^-(e_k)\phi\otimes e_k - \frac{n-p+1}{p(n-p)}\sum i(e_k)\mathfrak{R}\phi\otimes e_k\} \\
=& pr\{c_1\sum_{k,j}\nabla_{e_j}(R^-(e_k)\phi)\otimes e_k\otimes e_j + c_2\sum_{k,j}\nabla_{e_j}(i(e_k)\mathfrak{R}\phi)\otimes e_k\otimes e_j\} \\
=& c_1\sum_{k,j} e_j\wedge\nabla_{e_j}(R^-(e_k)\phi)\otimes e_k + c_1'\sum_{k,j,l}\delta_{kj}e_l\wedge\nabla_{e_j}(R^-(e_k)\phi)\otimes e_l \\
&+ c_2\sum_{k,j} e_j\wedge\nabla_{e_j}(i(e_k)\mathfrak{R}\phi)\otimes e_k + c_2'\sum_{k,j}\delta_{kj}e_l\wedge\nabla_{e_j}(i(e_k)\mathfrak{R}\phi)\otimes e_l \\
=& c_1\sum_{k,j} e_j\wedge\nabla_{e_j}(R^-(e_k)\phi)\otimes e_k + c_1'\sum_{k,l} e_l\wedge\nabla_{e_k}(R^-(e_k)\phi)\otimes e_l \\
&+ c_2\sum_{k,j} e_j\wedge i(e_k)\nabla_{e_j}(\mathfrak{R}\phi)\otimes e_k + c_2'\sum_{l,k} e_l\wedge i(e_k)\nabla_{e_k}(\mathfrak{R}\phi)\otimes e_l
\end{aligned}
$$

となる．そこで $\phi\in\ker C$ であるので $\nabla\phi$ は $d\phi, d^*\phi$ で書けるので，$\theta^+(Cd^*\phi)$ は $d\phi, d^*\phi$ に曲率 $R^+, \mathfrak{R}, \nabla R^+, \nabla\mathfrak{R}$ を適当に作用させたもので書けることになる．

以上のことを合わせて $\ker C$ の有限次元性を証明する．ϕ を共形キリング p-form として $(\phi, d\phi, d^*\phi, dd^*\phi)$ を考える．この切断が入るベクトル束は $E^p(M) := \Lambda^p(M)\oplus\Lambda^{p+1}(M)\oplus\Lambda^{p-1}(M)\oplus\Lambda^p(M)$ である．そしてこのベクトル束の rank は

$$
2\binom{n}{p} + \binom{n}{p-1} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p} + \binom{n+1}{p+1} = \binom{n+2}{p+1}
$$

である．そして $\nabla(\phi, d\phi, d^*\phi, dd^*\phi)$ を考えると，上で述べたことから

$$
\nabla(\phi, d\phi, d^*\phi, dd^*\phi) = A(X)(\phi, d\phi, d^*\phi, dd^*\phi)
$$

と書ける．ここで $A(X)$ は束準同形であり $A(fX) = fA(X)$ を満たすものである．具体的に書くのは面倒だが，リーマン曲率 R および ∇R に依存したものである．そこで $\tilde{\nabla}_X = \nabla_X - A(X)$ という接続を $E^p(M)$ へ導入すれば，$\phi\in\ker C$ ならば $\tilde{\nabla}_X(\phi, d\phi, d^*\phi, dd^*\phi) = 0$ となり平行切断である．平行切断で独立なものの数は，高々 $E^p(M)$ の rank である．よって

$$
\ker C \leq \binom{n+2}{p+1}
$$

が証明できた．

Remark 7.10. この手法はツイスタースピノールの次元が有限次元であることの証明の類似である．

上の証明から次は明らかである．

Corollary 7.23. キリング微分形式は $\phi \in \ker C \cap \ker d^*$ であったので，**キリング微分形式の次元は $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$ で抑えられる．特に，キリングベクトル場の次元は $\frac{n(n+1)}{2}$ 以下**となる．

Remark 7.11. キリングベクトル場は等長変換群（リー群）のリー環であった．実は，等長変換群に次元が $\frac{n(n+1)}{2}$ に一致したら，M は $\mathbb{R}^n$, H^n, S^n, $\mathbb{R}P^n$ のいずれかに一致する（see [12]）．

球面の場合に等号が成立することを見る．$\Lambda^p(M)$ 上で $dd^* + d^*d = \nabla^*\nabla + \mathfrak{R}$ が成立したが，球面の場合には $\mathfrak{R}$ は定数である．

Proof. $W_{ijkl} = K_{ijkl} = 0$ であり $\kappa = n(n-1)$ であるので，

$$
\begin{aligned}
&R_{\Lambda^p}(e_i, e_j) \\
=& -\frac{\kappa}{n(n-1)}\pi_{\Lambda^p}(e_i \wedge e_j) + \sum_k (E_{ik}\pi_{\Lambda^p}(e_k \wedge e_j) - E_{jk}\pi_{\Lambda^p}(e_k \wedge e_i)) \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{kl} W_{ijkl}\pi_{\Lambda^p}(e_k \wedge e_l) \\
=& -\frac{\kappa}{n(n-1)}\pi_{\Lambda^p}(e_i \wedge e_j) = -\pi_{\Lambda^p}(e_i \wedge e_j)
\end{aligned}
$$

となる．よって

$$
\mathfrak{R} = -\sum_{i,j} \pi_{\Lambda^p}(e_i \wedge e_j)\pi_{\Lambda^p}(e_i \wedge e_j) = p(n-p)
$$

となる．最後の等号は，直接計算でわかる（実は $\Lambda^p(M)$ への $\mathfrak{so}(n)$ の二次カシミール元の作用） ■

さて，固有値評価の手法を適用すれば

$$
\begin{aligned}
d^*d + d^*d =& \frac{n-p+1}{n-p}(\frac{n-p}{n-p+1}d^*d + \frac{n-p}{n-p+1}dd^*) \\
\geq& \frac{n-p+1}{n-p}(\frac{p}{p+1}d^*d + \frac{n-p}{n-p+1}dd^*) \\
=& \frac{n-p+1}{n-p}(C^*C + \mathfrak{R}) \geq p(n-p+1)
\end{aligned}
$$

となる．等号成立する p-form があれば，$\ker d \cap \ker C$ に入る．実際，球面上でスペクトル分解を行うと閉形式で固有値が $p(n-p+1)$ となるものが存在し，その重複度は $\binom{n+1}{p}$ となる．そこで上の不等式から，これら固有 p-from は $\ker C$ に入る．

一方で，余閉形式で固有値が $(p+1)(n-p)$ となるものも存在し，重複度は $\binom{n+1}{p+1}$ である．$d^*\phi=0$ であるので

$$
\begin{aligned}
(d^*d+d^*d)\phi =&\frac{p+1}{p}(\frac{p}{p+1}d^*d+\frac{p}{p+1}dd^*)\phi \\
=&\frac{p+1}{p}(\frac{p}{p+1}d^*d+\frac{n-p}{n-p+1}dd^*)\phi \\
=&\frac{p+1}{p}(C^*C+\mathfrak{R})\phi \geq \frac{p+1}{p}p(n-p)\phi=(n-p)(p+1)\phi
\end{aligned}
$$

という不等式が成立するが，固有値 $(n-p)(p+1)$ であるので $\phi \in \ker C$ となる（$\ker C \cap \ker d^*$ なので，これらはキリング微分形式である）以上から

$$
\dim \ker C = \binom{n+1}{p} + \binom{n+1}{p+1} = \binom{n+2}{p+1}
$$

となる．

球面上の微分形式のスペクトル分解については，次を参照：

1. G. B. Folland,「Harmonic analysis of the de Rham complex on the sphere」, J. reine angew. Math. **398** (1989), 130-143.

2. A. Ikeda and Y. Taniguchi,「Spectra and eigenforms of the Laplacian on S^n and $P^n(\mathbf{C})$」Osaka J. Math. **15** (1978), no. 3, 515-546.

7.6 共形キリング微分形式とスピノール

共形キリング微分形式とツイスタースピノールの関係について述べる．

Proposition 7.24. (M,g) をスピン多様体とする．ϕ_1,ϕ_2 **をツイスタースピノール**とする．このとき

$$
\omega_p(X_1,\cdots,X_p)=\langle (X_1\wedge\cdots\wedge X_p)\phi_1,\phi_2\rangle
$$

は**共形キリング** p***-form*** である．また，**平行スピノールなら平行** p***-form*** である．

Proof. 平行の場合は明らかである．ツイスタースピノールの場合について考えよう．

いつものように $(\nabla e_i)_x=0$ となる正規直交フレームを選んでおく．ツイスタースピノールとは $\nabla_X\phi+\frac{1}{n}XD\phi=0$ となるものであった．そこで

$$
\begin{aligned}
&(\nabla_{e_j}\omega_p)(e_1,\cdots,e_p)=\nabla_{e_j}\langle (e_1\wedge\cdots\wedge e_p)\phi_1,\phi_2\rangle \\
=&\langle (e_1\wedge\cdots\wedge e_p)\cdot\nabla_{e_j}\phi_1,\phi_2\rangle+\langle (e_1\wedge\cdots\wedge e_p)\phi_1,\nabla_{e_j}\phi_2\rangle \\
=&-\frac{1}{n}\langle (e_1\wedge\cdots\wedge e_p)e_j\cdot D\phi_1,\phi_2\rangle+\frac{1}{n}\langle e_j(e_1\wedge\cdots\wedge e_p)\phi_1,D\phi_2\rangle
\end{aligned}
$$

そこで

$$(d^*\omega)(e_1,\cdots,e_{p-1})=-\sum_{j=1}^{n}(\nabla_{e_j}\omega)(e_j,e_1,\cdots,e_{p-1})$$
$$=\sum_{j=p}^{n}\frac{1}{n}\langle e_je_1\cdots e_{p-1}e_j\cdot D\phi_1,\phi_2\rangle-\frac{1}{n}\sum_{j=p}^{n}\langle e_je_je_1\cdots e_{p-1}\phi_1,D\phi_2\rangle$$
$$=\frac{n-p+1}{n}(-1)^p\langle e_1\cdots e_{p-1}\cdot D\phi_1,\phi_2\rangle+\frac{n-p+1}{n}\langle e_1\cdots e_{p-1}\phi_1,D\phi_2\rangle$$
$$=\frac{n-p+1}{n}(-1)^p\langle e_1\cdots e_{p-1}\cdot D\phi_1,\phi_2\rangle+\frac{n-p+1}{n}(-1)^{(p-1)p/2}\langle\phi_1,e_1\cdots e_{p-1}D\phi_2\rangle$$
$$=\frac{n-p+1}{n}(-1)^p\{\langle(e_1\wedge\cdots\wedge e_{p-1})\cdot D\phi_1,\phi_2\rangle+(-1)^{p(p+1)/2}\langle\phi_1,(e_1\wedge\cdots\wedge e_{p-1})\cdot D\phi_2\rangle\}$$

となる．同様に,

$$(d\omega)(e_0,e_1,e_2,\cdots,e_p)=\sum_{i=0}^{p}(-1)^i(\nabla_{e_i}\omega)(e_0,\cdots,\hat{e_i},\cdots,e_p)$$
$$=-\sum(-1)^i\frac{1}{n}\langle e_0\cdots\hat{e_i}\cdots e_pe_i\cdot D\phi_1,\phi_2\rangle+\sum(-1)^i\frac{1}{n}\langle e_ie_0\cdots\hat{e_i}\cdots e_p\phi_1,D\phi_2\rangle$$
$$=-\sum_{i=0}^{p}(-1)^i(-1)^{p-i}\frac{1}{n}\langle e_0\cdots e_i\cdots e_p\cdot D\phi_1,\phi_2\rangle+\sum_{i=0}^{p}(-1)^i\frac{1}{n}(-1)^i\langle e_0\cdots e_i\cdots e_p\phi_1,D\phi_2\rangle$$
$$=(-1)^{p+1}\frac{p+1}{n}\langle e_0\cdots e_i\cdots e_p\cdot D\phi_1,\phi_2\rangle+\frac{p+1}{n}\langle e_0\cdots e_i\cdots e_p\phi_1,D\phi_2\rangle$$
$$=(-1)^{p+1}\frac{p+1}{n}\{\langle(e_0\wedge\cdots\wedge e_p)\cdot D\phi_1,\phi_2\rangle+(-1)^{p(p+1)/2}\langle\phi_1,(e_0\wedge\cdots\wedge e_p)\cdot D\phi_2\rangle\}$$

となる．

共形キリング微分形式であることを確かめるには

$$(\nabla_{e_j}\omega)(e_1,\cdots,e_p)=\frac{1}{p+1}(i(e_j)d\omega)(e_1,\cdots,e_p)-\frac{1}{n-p+1}(e_j\wedge d^*\omega)(e_1,\cdots,e_p)$$

をみればよいのであった．我々は $j=1$ と $j\notin\{1,\cdots,p\}$ の場合を見れば十分である．まず $j=1$ の場合には,

- $$\begin{aligned}&(\nabla_{e_1}\omega_p)(e_1,\cdots,e_p)\\&=-\frac{1}{n}\langle(e_1\wedge\cdots\wedge e_p)e_1\cdot D\phi_1,\phi_2\rangle+\frac{1}{n}\langle e_1(e_1\wedge\cdots\wedge e_p)\phi_1,D\phi_2\rangle\\&=-(-1)^p\frac{1}{n}\langle(e_2\wedge\cdots\wedge e_p)\cdot D\phi_1,\phi_2\rangle-\frac{1}{n}\langle(e_2\wedge\cdots\wedge e_p)\phi_1,D\phi_2\rangle\end{aligned}$$

- $$-\frac{1}{n-p+1}(e_1\wedge d^*\omega_p)(e_1,\cdots,e_p)=-\frac{1}{n-p+1}d^*\omega_p(e_2,\cdots,e_p)$$
$$=-\frac{1}{n}(-1)^p\{\langle(e_2\wedge\cdots\wedge e_p)\cdot D\phi_1,\phi_2\rangle+(-1)^{p(p+1)/2}\langle\phi_1,(e_2\wedge\cdots\wedge e_p)\cdot D\phi_2\rangle\}$$

- $(i(e_1)d\omega)(e_1, \cdots, e_p) = 0$

となるので $j = 1$ の場合が証明できる．同様に $j \notin \{1, \cdots, p\}$ の場合も成立する． ■

Remark 7.12. ホロノミー群が $SU(m), Sp(k), G_2, Spin(7)$ に含まれるときに，平行スピノールが存在したが，上の方法で，それぞれの幾何構造に付随した平行微分形式を作れる．[16].

Corollary 7.25. (M, g) をスピン多様体とする．ϕ をキリング数 μ が実数となる**実キリングスピノール**とする．このとき $p = odd$ とすれば

$$\omega_p(X_1, \cdots, X_p) = \langle (X_1 \wedge \cdots \wedge X_p)\phi, \phi \rangle$$

は**キリング** ***p-form*** である．同様にキリング数 μ が純虚数となる**虚キリングスピノール** ϕ に対して，$p = even$ なら ω_p は**キリング** ***p-form*** である．

Proof. キリングスピノールはツイスタースピノールであったので，ω_p は共形キリング形式である．そこでキリングになるには $d^*\omega_p = 0$ がいえればよい．キリングなら $D\phi = -n\mu\phi$ を満たしたので，

$$\begin{aligned}
&(d^*\omega)(e_1, \cdots, e_{p-1}) = -\sum_{j=1}^{n} (\nabla_{e_j}\omega)(e_j, e_1, \cdots, e_{p-1}) \\
=&\frac{n-p+1}{n}(-1)^p\{-n\mu\langle (e_1 \wedge \cdots \wedge e_{p-1}) \cdot \phi, \phi \rangle - n\bar{\mu}(-1)^p\langle (e_1 \wedge \cdots \wedge e_{p-1}) \cdot \phi, \phi \rangle\} \\
=&(n-p+1)(-1)^{p+1}(\mu + (-1)^p\bar{\mu})\langle (e_1 \wedge \cdots \wedge e_{p-1}) \cdot \phi, \phi \rangle
\end{aligned}$$

となる．この式から主張が証明できる． ■

この命題からキリングスピノールの名前の由来がわかる．

8 スピン c 接続とスピン c ディラック作用素

8.1 スピン c 構造上の接続

スピン構造である主 $\mathbf{Spin}(M)$ の接続（スピン接続）は $\mathbf{SO}(M)$ のレビチビタ接続 A_{LC}（$\mathbf{SO}(M)$ 上 $\mathfrak{so}(n)$ 値 1-form）を引き戻せばよかった．これは $\mathbf{Spin}(M) \to \mathbf{SO}(M)$ が 2 重被覆であり，接続は局所的な話だからである．

ちょっとスピン接続を思い出そう．A^{spin} がスピン接続とし，A_{LC} をレビチビタ接続とする．$U \subset M$ 上の局所正規直交フレーム $e = (e_1, \cdots, e_n)$ を使って書けば，$e^*(A_{LC})$ は U 上 $\mathfrak{so}(n)$ 値 1-from であるが，それは

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j} g(\nabla e_i, e_j)e_i \wedge e_j$$

となる．このときスピン接続は

$$\frac{1}{8}\sum_{i,j} g(\nabla e_i, e_j)[e_i, e_j]$$

となる．同様に，R をリーマン曲率とすれば，スピン接続に対する曲率は

$$\frac{1}{8}\sum_{i,j} g(R(\cdot,\cdot)e_i, e_j)[e_i, e_j]$$

となる．

さて，スピンc 構造 $\mathbf{Spin}^c(M)$ の接続を考える,「スピン幾何入門３」の記号を使う．$Q = \mathbf{SO}(M)$ として，P_1 を主 $U(1)$ 束とする．$\mathbf{Spin}^c(M)$ は $Q\tilde{\times}P_1$ のスピン構造（二重被覆）とみなせるのであった．この主束の接続を考える．まず Q 上の接続はレビチビタ接続 A_{LC} が入っている．また P_1 **の方の接続は** $U(1)$ **接続ならなんでもよい．それを** A **と書く**．これらをあわせて $A_{LC} \times A$ を $Q\tilde{\times}P_1$ 上の 1-form として，

$$A_{LC} \times A : T(Q\tilde{\times}P_1) \to \mathfrak{so}(n) \oplus i\mathbb{R}$$

を得る．これを $\mathbf{Spin}^c(M)$ へ引き戻せばよい．**つまり** $\Phi^*(A_{LC} \times A)$ **が** $\mathbf{Spin}^c(M)$ **の接続であり，これをスピンc 接続と呼ぶ**．言い換えれば，次の図式が可換になるような $\mathbf{Spin}^c(M)$ 上の接続である．

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{Spin}^c(M) & \xrightarrow{\Phi^*(A_{LC}\times A)} & \mathfrak{spin}^c(n) = \mathfrak{spin}(n) \oplus i\mathbb{R} \\
{\scriptstyle\Phi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Ad}_*\times l_*} \\
Q\tilde{\times}P_1 & \xrightarrow{A_{LC}\times A} & \mathfrak{so}(n) \oplus i\mathbb{R}.
\end{array}$$

局所フレームを使って，もう少し具体的に書いてみよう．$U \subset M$ として U 上の Q の局所フレームを $e = (e_1, \cdots, e_n)$ とすれば，$e^*(A_{LC})$ は U 上 $\mathfrak{so}(n)$ 値 1-form である．

$$e^*(A_{LC}) = \frac{1}{2}\sum_{i,j} g(\nabla e_i, e_j) e_i \wedge e_j$$

一方，U 上で P_1 の局所フレーム s をとれば U 上 $i\mathbb{R}$ 値 1-form $A^s := s^*(A)$ を得る．そこで $(e \times s)^*(A_{LC} \times A)$ は U 上 $\mathfrak{so}(n) \oplus i\mathbb{R}$ 値の 1-form であり,

$$(\frac{1}{2}\sum_{i,j} g(\nabla e_i, e_j) e_i \wedge e_j, A^s).$$

と書ける．局所フレーム $e \times s$ に対して，$\mathbf{Spin}^c(M)$ 上の対応する局所フレームを $\widetilde{e \times s}$ とする．そこでスピンc 接続の局所表示 $\widetilde{e \times s}^*(\Phi^*(A_{LC} \times A))$ は,

$$\widetilde{e \times s}^*(\Phi^*(A_{LC} \times A)) = (\frac{1}{8}\sum_{i,j} g(\nabla e_i, e_j)[e_i, e_j], \frac{1}{2}A^s)$$

となる．

Remark 8.1. A^s が $A^s/2$ となっているのはリー環の対応が $l_* : i\mathbb{R} \ni ia/2 \mapsto ia \in i\mathbb{R}$ となっているから．

同様にして曲率の局所表示を得ることができる．P_1 上の接続 A に対する曲率は．$U(1)$ が可換なので $F_A = dA + \frac{1}{2}[A \wedge A] = dA$ となり，M 上の 2-form になることに注意する．特に，接続の局所表示は A^s と s に依存するが，F_A は s を書く必要はない．

以上から

Proposition 8.1. M をスピン c 多様体とする．このスピン c 構造に付随した直線束 P_1 上の接続を A とする．このとき $Q\tilde{\times}P_1$ の局所フレーム $e \times s = (e_1, \cdots, e_n) \times s$ に対するスピン c 接続の局所表示は

$$(\frac{1}{8}\sum_{i,j} g(\nabla e_i, e_j)[e_i, e_j], \frac{1}{2}s^*A) \in \mathfrak{spin}^c(n) = \mathfrak{spin}(n) \oplus i\mathbb{R}.$$

また曲率の局所表示は

$$(\frac{1}{8}\sum_{i,j} g(R(\cdot,\cdot)e_i, e_j)[e_i, e_j], \frac{1}{2}dA)$$

となる．

Corollary 8.2. 同伴束である（複素）スピノール束 $\mathbf{S} := \mathbf{Spin}^c(M) \times_\Delta W$ 上では（上の局所表示に対応した，$\mathbf{S}$ の局所フレームをとったき），

$$\nabla^A \phi = d\phi + \frac{1}{4}\sum_{i,j} g(\nabla e_i, e_j)e_i e_j \phi + \frac{1}{2}A^s \phi$$

ここで $A^s\phi$ は ϕ に 1-*form* をテンソルしたもの（クリフォード作用ではない）．また，この接続に対する曲率は

$$R^A_\Delta(X,Y) = \frac{1}{4}\sum_{i,j} g(R(X,Y)e_i, e_j)e_i \cdot e_j \cdot + \frac{1}{2}dA(X,Y)$$

である．(P_1 の接続のとり方に依存するので A を明記している）．

主 $U(1)$ 束 P_1 上の接続 A を A' としたきにどうなるかを考える．

$$A - A' = \eta$$

とすると η は M 上 $i\mathbb{R}$ 値 1-form になる．このときスピノール束上の共変微分の変化は, 上の系から

$$\nabla^A_X \phi - \nabla^{A'}_X \phi = \frac{1}{2}\eta(X)\phi$$

となる．

Remark 8.2. P_1 に対して $c_1(P_1)$ が tosion 元になる場合は，接続 A が平坦接続になる．

8.2 ディラック作用素

M をスピン c 多様体とし，$\mathbf{Spin}^c(M)$ をスピン c 構造とする．このときスピノール束 $\mathbf{S} := \mathbf{Spin}^c(M) \times_\Delta W_n$ とする．この同伴束にスピン c 接続からくる共変微分を ∇^A とする．このとき $\mathbf{S}$ **はディラック束になる**．

1. クリフォード束が作用している．

2. 「スピン幾何入門３」で見たように．$\mathbf{S}$ には内積が入り，$\langle v\phi, \psi\rangle + \langle \phi, v\psi\rangle = 0$ となる．

3. クリフォード作用と共変微分が可換．$\nabla_Y^A(X\phi) = (\nabla_Y X)\phi + X\nabla_Y^A\phi$

4. 共変微分が内積を保存．$(\nabla_X^A\phi_1, \phi_2) + (\phi_1, \nabla_X^A\phi_2) = X(\phi_1, \phi_2)$

Proof. 「スピン幾何入門３」でみたように，W に入るクリフォード積や内積は，スピン c 群の作用と可換であったので，それらは ∇^A に対して平行になるため． ■

Definition 8.1. スピノール束はクリフォード加群なので，**スピン c ディラック作用素**を

$$D_A := \sum e_i \cdot \nabla_{e_i}^A$$

として定義する．

$\mathbf{S}$ はディラック束であるので次は明らか．

Proposition 8.3. *Propositon 4.1* で述べたディラック作用素に対する結果は，スピン c ディラック作用素 D_A に対して成立する．

普通のディラックと異なるのは，Lichnerowicz 公式と指数定理である．また共形共変性については P_1 と接続 A を変えなければ成り立つ．

ここでは Lichnerowicz 公式について述べる．指数定理は後で．

Proposition 8.4 (Lichnerowicz)**.** スピン c ディラック作用素 D_A に対して次が成立する．

$$D_A^2 = (\nabla^A)^*\nabla^A + \frac{\kappa}{4} + \frac{1}{2}dA\cdot.$$

ここで dA の定義はつぎのよう．

$$dA\cdot = \sum_{i<j} dA(e_i, e_j)e_i \cdot e_j\cdot = \frac{1}{2}\sum_{i,j} dA(e_i, e_j)e_i \cdot e_j.$$

つまり dA **は純虚数値** 2-***form*** であるのでそれをスピノール束に作用させたもの（束準同形）である．

Proof. 普通のディラック作用素のときの計算と同様にして，$D_A^2 - (\nabla^A)^*\nabla^A = \frac{1}{2}\sum_{i,j} e_i e_j R_\Delta^A(e_i, e_j)$ がわかる．そこで R_Δ^A を代入して計算すればよい．

次のように証明してもよい．スピン c 多様体には局所的にはスピン構造が入る．このとき $\mathbf{Spin}^c(M) = \mathbf{Spin}(M) \otimes L$ とかけた．ここで $L^2 = P_1$ である．そしてスピノール束 $\mathbf{S}_0 \otimes L$ となる．ここで $\mathbf{S}_0$ はスピン構造に対するスピノール束である．よってディラック作用素は twisted ディラック作用素になるので，twisted ディラック作用素に対する公式を使えばよい．このとき P_1 に入る接続が A であったので，L に入る接続は $1/2A$ となることに注意する．実際，曲率による第一チャーン類を計算すると $c_1(P_1) = \frac{1}{2\pi i}[dA] = \frac{1}{2\pi i}2[1/2dA] = 2c_1(L)$ となる． ■

Corollary 8.5. 上の命題の状況で束準同形 $\kappa/4 + \frac{1}{2}dA\cdot$ がすべての点で正であると仮定する．多様体をコンパクトとすれば，$\dim ker D_A = 0$ となる．

Proof. dA がスピノール束上の対称変換であることをみればよい．dA は 2-from のスピノールへの積であった．さらに純虚数値である．よって

$$\langle dA\phi, \psi\rangle = (-1)^{2(2+1)/2}(-1)\langle \phi, dA\psi\rangle = \langle \phi, dA\psi\rangle$$

が成立する．よって dA はエルミート行列であり，各点で対角化可能である． ■

他の接続 A' をとってきたきに，$A - A' = \eta$ とする．このとき

$$D_A - D_{A'} = \sum e_i(\nabla_{e_i}^A - \nabla_{e_i}^{A'}) = \sum \frac{1}{2}\eta(e_i)e_i = \frac{1}{2}\eta\cdot$$

となる．ここで $\eta\cdot$ はリーマン計量によって 1-from η をベクトル場とみなしてクリフォード作用にしている．

さて，ディラック作用素の別の定義は，共変微分と射影の合成であった．$\mathbf{S}$ も $T(M)$ も $\mathbf{Spin}^c(M)$ の同伴束であるので，全くスピン構造のときと同様のことができる．例えば

$$\mathbf{S} \otimes T(M) = \mathbf{S} \oplus \mathbf{T}$$

という分解が成立する．

Remark 8.3. 局所的に $\mathbf{S} = \mathbf{S}_0 \otimes L$ と見た場合には，$\mathbf{T} = \mathbf{T}_0 \otimes L$ となる．($\mathbf{S}_0$, $\mathbf{T}_0$ はスピン c 構造に対するスピノール束とツイスター束である)．このように分解されるのは $Spin^c(n) = Spin(n) \otimes U(1)$ となるためであり，ほぼ直積群とみなせるためである．

そこで**スピン c ツイスター作用素**は

$$T_A\phi := \sum_i (\nabla_{e_i}^A \phi + \frac{1}{n} e_i D_A \phi) \otimes e_i \in \Gamma(\mathbf{T})$$

として定義する．また $\phi \in \ker T_A$ を**スピン c ツイスタースピノール**と呼ぶ．

さらに $T_A^*(\sum \phi_i \otimes e_i) = -\sum \nabla_{e_i}\phi_i$ となり，

$$\frac{1}{n}D_A^2 + T_A^* T_A = (\nabla^A)^*\nabla^A$$

が成立する．もちろん固有値評価などもできるが，これは接続 A に依存したものになってしまうので，あまり面白くないと思う．

スピン c キリングスピノールも $\nabla_X^A\phi = \lambda X\phi$（$\forall X$）で定義する．**スピン c 平行スピノール**は $\lambda = 0$ のときである．平行スピノール，キリングスピノールをもつスピン多様体の分類がスピン幾何において重要であることは述べた．同様にしてスピン c 平行スピノール，スピン c キリングスピノールをもつ多様体の分類に対する結果もある．A. Moroianu「Parallel and Killing spinors an $Spin^c$ manifolds」C.M.P, 1997, 417-428.

また M. Herzlich and A. Moroianu「Generalized Killing spinors and conformal eignvalue estimate for $spin^c$ manifold」では，一般キリングスピノールについて論じている．一般キリングスピノールとは $\nabla_X\phi = fX\phi$（$f \in C^\infty(M)$）となるスピノールである．この論文では，スピン c 構造では $n = 2, 3$ なら一般キリングスピノールが存在し，$n \geq 4$ なら存在しないことを証明している．また，この非存在を固有値評価に応用している．

以上のことは実践編で論じる予定である．

8.3 スピン c 平行スピノール

この subsection ではスピン c 平行スピノールに関する基本的な結果について述べる．スピン c 多様体上のスピノール束を考える．X をベクトル場，ϕ をスピノールとして

$$\sum e_i R_\Delta^A(X, e_i)\phi = -\frac{1}{2}Ric(X)\cdot\phi + \frac{1}{2}(i(X)dA)\cdot\phi$$

が成立することは，すぐに証明できる．

さて，$\phi \in \Gamma(\mathbf{S})$ が（スピン c）平行スピノールとする．つまり $\nabla^A\phi = 0$ とする．

$$X\|\phi\|^2 = \langle\nabla_X^A\phi, \phi\rangle + \langle\phi, \nabla_X^A\phi\rangle = 0$$

となるので $\|\phi\| \equiv c$ となる．特に，ある点で零なら恒等的に零である．そこで恒等的に零でないとすると，上の公式に代入すれば左辺は零であるので，

$$Ric(X)\cdot\phi = (i(X)dA)\cdot\phi.$$

$Ric(X)$ は実であるが $i(X)dA$ は純虚数であるので，補題 5.6 から

$$|Ric(X)| = |i(X)dA|, \quad \langle Ric(X), \frac{1}{\sqrt{-1}}(i(X)dA)\rangle = 0 \quad \forall X$$

が成立する．これらの式が意味することを調べるため，線形代数の復習をしよう．

Lemma 8.6. 実ベクトル空間上で S を対称変換，A を交代変換とする，このとき

$$|S(X)| = |A(X)|, \quad (S(X), A(X)) = 0 \quad \forall X$$

が成立するなら，$\|S\| = \|A\|$（行列ノルム）である．

Proof. $(S(X), A(X)) = 0$ に $X+Y$ を代入すると $(S(X), A(Y)) + (S(Y), A(X)) = 0$ であるので $(X, SA(Y)) - (AS(Y), X) = 0$ となり，$SA = AS$ を得る．よって同時対角化可能である．つまり，S の固有値を λ_i，固有空間を V_i とすれば $ASv_i = \lambda_i Av_i = S(Av_i)$ となるので $Av_i \in V_i$ である．そこで $A(V_i) \subset V_i$ であるので，V_i 上で A を対角化できるのである．よって A を対角化して

$$A|_{V_i} = \begin{pmatrix} 0 & -w_1 & & & & & \\ w_1 & 0 & & & & & \\ & & 0 & -w_2 & & & \\ & & w_2 & 0 & & & \\ & & & & \cdots & & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

とする．さらに $|S(X)| = |A(X)|$（for any X）であるので，$\lambda_i = \pm w_j$ が成立するので，

$$A|_{V_i} = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda_i & & & \\ \lambda_i & 0 & & & \\ & & 0 & -\lambda_i & \\ & & \lambda_i & 0 & \\ & & & & \cdots \end{pmatrix}$$

の形をしている．特に

$$\|S\|^2 = \mathrm{tr}({}^tSS) = \mathrm{tr}S^2 = \sum multi(\lambda_i)\lambda_i^2$$
$$\|A\|^2 = \mathrm{tr}({}^tAA) = -\mathrm{tr}A^2 = -\sum multi(\lambda_i)(-\lambda_i^2)$$

となるので $\|S\| = \|A\|$ である． ■

そこで，我々が考えたいた状況にもどれば，2-form と行列のノルムは 2 倍の差があるので，

$$\|Ric\|^2 = 2\|dA\|^2$$

が成立する．以上から

Proposition 8.7. (M, g) をスピン c 構造をもつリーマン多様体として A を P_1 上の接続とする．もし *non-trivial* な平行スピノール ϕ があるとすると（$\nabla^A\phi = 0$）， *1.* $\|Ric\|^2 = 2\|dA\|^2$.

2. $\mathrm{rank} dA = \mathrm{rank} Ric$（各点で）.

3. 接束の束準同型として Ric と dA は可換.

Remark 8.4. (M, g) がスピン多様体なら $A = 0$ として，平行スピノールがあるならリッチ平坦となる．上の命題はスピン c への一般化である．

Corollary 8.8. (M, g) をスピン c 構造をもつリーマン多様体として A を P_1 上の接続とする．Ric **の *rank* がある点で奇数**とする．このとき，任意のスピン c 構造と任意の接続 A に対して，*non-trivial* な**平行スピノールは存在しない**.

8.4 スピン c ディラック作用素の指数定理

スピン c ディラック作用素 D_A に対する指数定理を考える．スピン c 構造 $\mathbf{Spin}^c(M)$ は局所的に $\mathbf{Spin}(M) \otimes L$ と書ける．ここで $L^2 = P_1$ である．そしてスピノール束は局所的に $\mathbf{S} = \mathbf{S}_0 \otimes L$ となる．よって，twisted ディラック作用素の指数定理を適用することができる．

Proposition 8.9. (M, g) を偶数次元コンパクト向きつきスピン c 多様体とする．また $c = c_1(P_1)$ とする．スピン c ディラック作用素 D_A に対する指数を

$$\mathrm{ind}(D_A) := \dim \ker D_A^+ - \dim \ker D_A^-$$

として定義する．このとき

$$\mathrm{ind}(D_A) = \int_M (\exp \frac{1}{2} c) \hat{\mathbf{A}}(TM)$$

が成立する．

Proof. $\mathbf{S}_0 \otimes L$ として考えてよい．$c_1(L) = c_1(P_1)/2 = c/2$ であるので，twisted ディラック作用素の指数定理に代入すれば

$$ch(L) = \exp c/2$$

であるので，命題が証明された． ■

この命題から次の整数性定理が成立する．

Corollary 8.10. (M, g) を偶数次元コンパクト向きつき多様体とする．さらに $c \in H^2(M, \mathbb{Z})$ が $c \equiv w_2(M) \mod 2$ を満たすとする．このとき

$$\int_M (\exp \frac{1}{2} c) \hat{\mathbf{A}}(TM)$$

は整数である．

参考文献

[1] M. F. Atiyah, N. J. Hitchin and I. M. Singer, *Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry,* Proc. R. Soc. Lond., A **362**, (1978), 425-461.

[2] C. Bär, *Real Killing spinors and holonomy*, Comm. Math. Phys. 154, (1993), 509-521.

[3] C. Bär, *The Dirac operator on space forms of positive curvature*, J. Math. Soc. Japan, 48, (1996), 69-83.

[4] H. Baum, *Complete Riemannian manifolds with imaginary Killing spinors*, Ann. Glob. Anal. Geom. 7 (1989), 205-226.

[5] H. Baum, Th. Friedrich, R. Grunewald and I. Kath, *Twistors and Killing spinors on Riemannian manifolds,* Teubner-Verlag, Leipzig/Stuttgart 1991.

[6] A. Besse, *Einstein manifolds*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1987.

[7] R. Bott and L.W. Tu *Differential Forms in Algebraic Geometry*, GTM 82, Springer.

[8] Th. Friedrich, *Dirac operators in Riemannian Geometry,* Graduate Studies in Mathematics 25, AMS

[9] S. Gallot and D. Meyer, *Opérateur de courbure et laplacien des formes différentielles d'une variété Rimannienne,* J. Math. Pures Appl. (9) **54** (1975) 259-284.

[10] N. Hitchin *Harmonic spinors,* Adv. Math. 14, 1-55 (1974)

[11] D. Joyce, *Compact Manifolds with Special Holonomy,* Oxford Math. Monographs, Oxford University Press, Oxford, 2000.

[12] 小林-野水, *Foundations of Diffrential geometry I,II,* Interscience, John Wiley, New York, 1963, 1969.

[13] H. B. Lawson and M. L. Michelsohn, *Spin Geometry,* Princeton Univ. Press, Princeton, 1989.

[14] H. B. Rademacher, *Generalized Killing spinors with imaginary Killing function and conformal Killing fields*, in "Global Differential Geometry and Global Analysis", Spinrger Lecture Notes Math. 1481 (1991), 192-198.

[15] Semmelmann, *conformal Killing forms on Riemannian manifolds*, Math, Z. (math.DG/0206117)

[16] M. Wang, *Parallel spinors and Parallel forms*, Ann. Golob. Anal. Geom. 7 (1989), 59-68.

[17] M. Wang, *On non-simply connected manifolds with non-trivial parallel spinor*, Ann. Golob. Anal. Geom. 13 (1995), 31-42.

[18] Weber and Goldberg, *conformal deformaions of Riemannian manifold*, 1969

[19] 小林俊行・大島利雄, Lie 群と Lie 環１，２ 岩波講座　現代数学の基礎１２，１３, 1999 年.

[20] 酒井隆 リーマン幾何学 裳華房　数学選書１１，1992 年.

[21] 本間泰史，局所指数定理，ホームページからダウンロード化.

索 引