スピン幾何入門３
スピン構造とスピンｃ構造

本間 泰史 *

スピン幾何入門３において，スピン構造およびスピンｃ構造について学ぶ．スピン幾何入門１，２での結果を多様体上で議論することになる．またスピン構造の存在は多様体上にスピノール束というクリフォード代数が作用するベクトル束を作れることになる．そしてディラック作用素はこのスピノール束に作用するのである.（ディラック作用素についてはスピン幾何入門４で述べる）.

参考文献について：このノートで必要と思われる知識．それなりに説明を書いてあるが，それでもわからないという読者は以下で挙げるテキストや論文を参照にするとよい.

- 主束やベクトル束及びその特性類に関する知識：例えば小林昭七「接続の微分幾何とゲージ理論」．このノートでたまに接続は平行切断などの言葉を使うが，それらについては入門４で詳しく述べる.
- 代数的位相幾何学．ホモロジー，コホモロジー，チェックコホモロジーなど．Bott-Tu「Differential forms in Algebraic topology」がよい（必読）．この本は $\mathbb{R}$ 係数の話が多いので，$\mathbb{Z}$ 係数ホモロジーなどについては，位相幾何の本ならなんでもよいと思う.
- ある程度の複素幾何に関する知識（正則関数層のコホモロジーなど）：小林昭七「複素幾何１，２」がよい．また微分幾何でつかう複素幾何の速戦コースとしてはNicolaescu「Notes on Seiberg-Witten theory」がよい（ただしここまでの知識は必要とはしない）.
- スピン幾何についてはスピン幾何入門１，２や [1]，[2] を参照.

目 次

*理科大理工, version.2005.9.10（多分最終版）

1　スピン構造

この章の目的はスピン幾何入門１での結果を各点での話だとみて，それを多様体上に大域的に拡張することである.

1.1　序論：多様体の向き

(M, g) を n 次元リーマン多様体とする．この接空間 (T_xM, g_x) は内積の入ったベクトル空間であり，$(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ をモデルとしたベクトル空間である．点 x で正規直交基底の全体を考えれば $O(T_xM)$ を得る．これを多様体上のすべての点で考えれば**正規直交フレーム束** $\mathbf{O}(M)$ を得ることができる．次に，T_xM に向きを入れて，向きつき正規直交基底の全体を考えれば $SO(T_xM)$ を得る．これを多様体上で考えると，各点で向きのとり方は二つあるので，大域的に向きがうまくつながるかわからない．つまり，一般には $\mathbf{SO}(M)$ は定義できるかわからない．例えばメビウスの輪を伸ばしたもの（S^1 上の実１次元直線束で一回捻ったもの）考えると，向きはうまくつながらない．多様体に向きが入るには，多様体に位相的な条件を必要とするのである．また向きが入ったとしても向きの入れ方は一つとは限らない．

多様体に向きが入った場合には $SO(T_xM)$ の二重被覆を考えれば各点でスピン群を得る．これを大域的につなげて主スピン群束を得ようとしても上と同様で一般にはうまく行かないことがわかる．この場合にも位相的な条件を必要とするのである．また，主スピン群束が存在したとしても，一つとは限らない．

このように，入門１での話しを多様体上で大域的に行うために位相的な条件が必要なのである．

スピン構造を議論するまえに練習として，多様体の向きが入るための条件について見ていこう．(M, g) を n 次元リーマン多様体とする．$M = \cup_i U_i$ として局所座標を取っておく．各 U_i 上で適当に正規直交フレーム f_i をとる．これを使って主 $O(n)$ 束である正規直交フレーム束 $\mathbf{O}(M)$ は局所自明化されるのであった．また推移関数とは $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ のときに $f_j = f_i g_{ij}$ で定義される $O(n)$ 値関数 $g_{ij} : U_i \cap U_j \to O(n)$ のことである．この推移関数を使って局所的に $U_i \times O(n)$ であるものを張り合わせて $\mathbf{O}(M)$ をつくる．そして，この推移関数は $g_{ij} = g_{ji}^{-1}$, $g_{ij}g_{jk}g_{ki} = \mathrm{id}$ を満たす．

さて，$\tau_{ij} = \det g_{ij}$ とする，これは $\mathbb{Z}_2$ 値（± 1 値）であり，$\tau_{ij}\tau_{jk}\tau_{ki} = 1$ から，Cech 1-cocycle $\tau = \{\tau_{ij}\}$ を定める．つまり $[\tau] \in H^1(M, \mathbb{Z}_2)$ となる．$[\tau]$ が自明，つまり $\tau_{ij} = \omega_i\omega_j$ とする．ここで $\omega_i = \omega_i^{-1} : U_i \to \mathbb{Z}_2$ である．$\omega_i = 1$ のときはフレーム f_i はそのままにして，$\omega_i = -1$ のときは f_i の向きが変わるようにフレームを取り替える．このとき新しい推移関数 $\tilde{g}_{ij}$ は $\det \tilde{g}_{ij} = 1$ を満たすことがわかる．つまり $\tilde{g}_{ij} \in SO(n)$ であり多様体に向きが入る．また，向きが入ったとしても，その向きは ω_i のとり方に依存している．$\tau_{ij} = 1$ のとき $\omega_i = \omega_j = -1$ とするか，$\omega_i = \omega_j = 1$ とするかによって，向きが変わることになる．そこで，ある向きを $\{\omega_i\}$ として, 別の向きを $\{\omega'_i\}$ とすれば，$\omega_i = z_i\omega'_i$ となる $\{z_i\}$ が定まる．そし

て $1 = \omega_i\omega_j = z_iz_j\omega'_i\omega'_j = z_iz_j$ であるので z_i は大域的に張り合わさって $H^0(M,\mathbb{Z}_2)$ の元 $[z]$ を定める．つまり**向きの取り方は** $H^0(M,\mathbb{Z}_2)$ **（$\mathbb{Z}_2$ が連結成分の個数だけある）によって分類される**ことになる．

上で定義した $[\tau]$ **を第一スティーフェル-ホイットニー類**とよび $w_1(M) \in H^1(M,\mathbb{Z}_2)$ とかく（正確には接束の第一スティーフェル-ホイットニー類である）．よって**「多様体が向き付け可能」** $\Longleftrightarrow$ **「$w_1(M) = 0$」**であることがわかった．

Remark 1.1. 上ではリーマン多様体としたが，特にリーマン計量は必要しない．実際，向きつきフレーム束である主 $GL^+(n,\mathbb{R})$ 束が存在するかどうかの問題である．ここで $GL^+(n,\mathbb{R})$ は $\det > 0$ となる行列.

1.2 スピン構造

1.2.1 スピン構造の定義

上の多様体の向きの場合を参考にして，主 $Spin(n)$ 束が存在するかについて議論していこう．(M,g) を向きつきリーマン多様体とする．このとき**向きつき正規直交フレーム束を** $\mathbf{SO}(M)$ **と書く**．これは主 $SO(n)$ 束である．

構造群 $SO(n)$ の $\mathbb{R}^n$ への作用を拡張して，$SO(n)$ を $\mathbb{C}l_n$ へ作用させる．これを ρ と書く．このとき同伴ベクトル束である**クリフォード代数束** $\mathbb{C}l(M) := \mathbf{SO}(M)\times_\rho \mathbb{C}l_n$ **を得る**. これは $\oplus\Lambda^p(M)\otimes\mathbb{C}$ とベクトル束として同型である．異なるのは，$\mathbb{C}l(M)$ の**各ファイバーにはクリフォード積構造が入る**ことである．もちろん点 x でのクリフォード積は (T_xM, g_x) から作られるクリフォード代数である．具体的には,

$$\mathbb{C}l(M)\times\mathbb{C}l(M) \ni ([p,\phi],[p,\psi]) \mapsto [p,\phi\psi] \in \mathbb{C}l(M)$$

として積を定義すればよい（各自 well-defined を確かめよ）．$Spin(n) \subset \mathbb{C}l(M)$ であったので，$\mathbf{SO}(M)\times_\rho Spin(n)$ とすればファイバーが $Spin(n)$ のファイバー束を作れる．各点のファイバーにスピン群の構造が入るが，これは主束ではない.（主束は右から構造群が作用するもので，各ファイバーに群構造がはいるわけでない）．よってこれでは駄目.

$\mathbf{SO}(M)$ に付随した主 $Spin(n)$ 束はスピン構造と呼ばれるが正確な定義は次のよう.

Definition 1.1. M 上の主 $Spin(n)$ 束 $\mathbf{Spin}(M)$ 及び次の可換図式を満たす束準同形 Φ を M の**スピン構造**という：

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{Spin}(M)\times Spin(n) & \xrightarrow{\Phi\times\mathrm{Ad}} & \mathbf{SO}(M)\times SO(n) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathbf{Spin}(M) & \xrightarrow{\Phi} & \mathbf{SO}(M) \\
\downarrow & & \downarrow \\
M & \xrightarrow{=} & M
\end{array}$$

スピン構造 $\mathbf{Spin}(M)$, $\mathbf{Spin}(M)'$ **が同値**とは主束の同型 $f : \mathbf{Spin}(M) \to \mathbf{Spin}(M)'$ で $\Phi' \circ f = \Phi$ となるものが存在するときを言う．もちろんスピン構造の同値類は一つとは限らない．

次の命題は，このスピン構造が存在するか，もし存在したらどれだけあるかについて述べている，

Proposition 1.1. **「向きづけられたリーマン多様体がスピン構造をもつ」** $\Longleftrightarrow$ **「**M **の第２スティーフェル-ホイットニー類** $w_2(M) = 0$**」**. またスピン構造が存在するとき, **異なるスピン構造は** $H^1(M, \mathbb{Z}_2)$ **で分類**される.

Proof. スピン構造は $\mathbf{SO}(M)$ の 2 重被覆であり, 各ファイバー ($\simeq SO(n)$) 上で非自明な 2 重被覆となるものである．そこで，次のように考える．$\mathbf{SO}(M)$ 束の推移関数を $g_{ij}(x) \in SO(n)$ とする. 各 ij に対して $Spin(n)$ への lift をひとつとり $h_{ij}(x)$ とする.（二つの lift がありもうひとつは $-h_{ij}(x)$ である）. このとき $g_{ij}g_{jk}g_{ki} = 1$ から

$$h_{ij}h_{jk}h_{ki} = z_{ijk}I,$$

を得る．ここで $z_{ijk} = \pm 1$ となる. これは明らかに cocycle であるので $H^2(M, \mathbb{Z}_2)$ の元を $[z]$ 定める．$[z] = 0$ であるとする. つまり $z_{ijk} = \omega_{ij}\omega_{jk}^{-1}\omega_{ki}$ とする. ここで $\{\omega_{ij}\}$ ($\omega_{ij} = \omega_{ij}^{-1} \in \mathbb{Z}_2$）は 1-cochain. このとき lift h_{ij} を別の lift $h'_{ij} = h_{ij}\omega_{ij}$ に変える. この lift に関して

$$h'_{ij}h'_{jk}h'_{ki} = z_{ijk}^2 I = I$$

となり, $\{h'_{ij}\}$ を推移関数とする主 $Spin(n)$ 束が存在する（このとき図式を可換にする Φ が存在することを各自確かめよ）. つまり $[z]$ が trivial であることがスピン構造が存在するための必要十分条件である. そして, **この** $[z] \in H^2(M, \mathbb{Z}_2)$ **を第２スティーフェル-ホイットニー類とよび** $w_2(M)$ **と書く**.（$w_1(M)$ と同様に，リーマン計量は必要としない．主 $GL^+(n, \mathbb{R})$ 束の二重被覆束が存在するかの問題である．つまり多様体の位相できまるもの）．また二つの異なるスピン構造 $\{h_{ij}\}$, $\{h'_{ij}\}$ が存在したとする．$SO(n)$ へ落とせば同じ元を定めるので

$$h_{ij} = \tau_{ij}h'_{ij}$$

として $\mathbb{Z}_2$ 値の cochain $\{\tau_{ij}\}$ が定まる. これは明らかに cocycle であるので $[\tau] \in H^1(M, \mathbb{Z}_2)$ の元が定まる．$[\tau] = 0$ つまり $\tau_{ij} = \omega_i\omega_j^{-1}$ であるなら, $h_{ij}h'^{-1}_{ij} = \omega_i\omega_j^{-1}$ となり，h_{ij} と h'_{ij} は g_{ij} のリフトかつ同じ主 $Spin(n)$ 束を与えることになりスピン構造として同値である．また $[\tau] \neq 0$ 及びあるスピン構造の推移関数 h_{ij} に対して，$\tau_{ij}h_{ij}$ を考えると，これは異なるスピン構造を与える．**つまり** $H^1(M, \mathbb{Z}_2)$ **はスピン構造の同値類全体に作用している**．そしてスピン構造を一つ固定すれば $H^1(M, \mathbb{Z}_2)$ と同一視できる．このように異なるスピン構造は $H^1(M, \mathbb{Z}_2)$ で分類される． ■

Definition 1.2. 向きつきリーマン多様体で，そのフレーム束にスピン構造が入る多様体を**スピン多様体**とよぶ.（正確には，多様体とスピン構造の組みと合わせてスピン多様体として定義する）.

Remark 1.2. 勘違いしてはいけないことは，**スピン構造が定まったからといって，$H^1(M,\mathbb{Z}_2)$ の元が定まるわけではない**．どれかスピン構造を一つ固定すれば，スピン構造全体が $H^1(M,\mathbb{Z}_2)$ と同型になると言っているのである．つまりスピン構造全体は $H^1(M,\mathbb{Z}_2)$ をモデルとしている．

いろいろと後で必要となるので，$H^1(M,\mathbb{Z})$ と $H^1(M,\mathbb{Z}_2)$ について見ていこう．まずこれらを計算するのに必要な普遍係数定理を証明なしに述べる.（参考：佐藤肇「位相幾何」岩波書店）$G=\mathbb{Z},\mathbb{Z}_m$ として

$$H^n(M,G)\simeq \mathrm{Hom}(H_n(M,\mathbb{Z}),G)\oplus Ext(H_{n-1}(M,\mathbb{Z}),G)$$

が成立する．さらに次の公式は役立つ．

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z},\mathbb{Z})=\mathbb{Z},\quad \mathrm{Hom}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}_m)=\mathbb{Z}_m,\quad \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_m,\mathbb{Z})=0,\quad \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_m,\mathbb{Z}_n)=\mathbb{Z}_{(m,n)}$$

ここで (m,n) は m,n の最大公約数.

$$Ext(\mathbb{Z},\mathbb{Z})=Ext(\mathbb{Z},\mathbb{Z}_m)=0,\quad Ext(\mathbb{Z}_m,\mathbb{Z})=\mathbb{Z}_m,\quad Ext(\mathbb{Z}_m,\mathbb{Z}_n)=\mathbb{Z}_{(m,n)}$$

さて，$H_1(M,\mathbb{Z})=(\oplus_{i=1}^p\mathbb{Z})\oplus(\oplus_{k=1}^q\mathbb{Z}_{m_k})$ であったとする．普遍係数定理から

$$H^1(M,\mathbb{Z})=\mathrm{Hom}(H_1(M,\mathbb{Z}),\mathbb{Z})\oplus Ext(H_0(M,\mathbb{Z}),\mathbb{Z})=\mathrm{Hom}(H_1(M,\mathbb{Z}),\mathbb{Z})=\oplus_{i=1}^p\mathbb{Z}$$

となり，捻れ部分は存在しない．

一方，

$$\begin{aligned}H^1(M,\mathbb{Z}_2)&=\mathrm{Hom}(H_1(M,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}_2)\oplus Ext(H_0(M,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}_2)=\mathrm{Hom}(H_1(M,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}_2)\\&=\oplus_{i=1}^p\mathbb{Z}_2\oplus(\oplus_{k=1}^q\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_{m_k},\mathbb{Z}_2))=\oplus_{i=1}^p\mathbb{Z}_2\oplus(\oplus_{\{k\mid m_k=even\}}\mathbb{Z}_2)\end{aligned}$$

となり，この場合には $H_1(M,\mathbb{Z})$ の捻れ部分の寄与がある．つまり一般に，

$$\dim_{\mathbb{Z}}H^1(M,\mathbb{Z})\le\dim_{\mathbb{Z}_2}H^1(M,\mathbb{Z}_2)$$

となるのである．

Remark 1.3. 特性類は接束から決めていくものであるので，一般には微分位相不変量である．しかし,. Wu の結果から，M がコンパクトならスティーフェル-ホイットニー類は M のホモトピー不変量であることが知られている（つまり微分構造には依存しない）．よって，スピン構造をもつかどうかはホモトピー不変である．

1.2.2　ベクトル束上のスピン構造

上のスピン構造とは接束にスピン構造が入るかどうかの問題であった．同様にして向きつき計量つきベクトル束 E 上のスピン構造を考えることができる．この構造はスピン c 構造，部分多様体のスピン構造のときに必要.

勝手な多様体 M があり，M 上の実ベクトル束 E を考える（E は同伴束である必要はない．M にも向きやリーマン計量は必要ない）．E の推移関数を考えれば，上と同様にして E に対して第一スティーフェルホイットニー類 $w_1(E) \in H^1(M, \mathbb{Z}_2)$ が定まる．この $w_1(E)$ が零のとき E は向き付け可能とよぶ．別の言い方をすれば，**向き付け可能とは $\Lambda^{top}(E)$ が自明束となること**．このとき E の向きを一つ定めることができる.

Example 1.1. $E = TM$ の場合には，$w_1(TM)$ を $w_1(M)$ と書く.

E に向きが入っているとして，計量も入っていると仮定する．このとき対応する主 $SO(r)$ 束 $\mathbf{P}_{SO}(E)$ を得ることができる．つまり推移関数が E と同じである主束．この主束に関してスピン構造を考えることができる.

Definition 1.3. M 上の主 $Spin(r)$ 束 $\mathbf{P}_{Spin}(E)$ 及び次の可換図式を満たす束準同形 Φ を E の**スピン構造**という：

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{P}_{Spin}(E) \times Spin(r) & \xrightarrow{\Phi \times \mathrm{Ad}} & \mathbf{P}_{SO}(E) \times SO(r) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathbf{P}_{Spin}(E) & \xrightarrow{\Phi} & \mathbf{P}_{SO}(E) \\
\downarrow & & \downarrow \\
M & \xrightarrow{=} & M
\end{array}$$

E のスピン構造の同値関係も多様体のスピン構造と同様に定義する.

E の推移関数から $w_2(E)$ が定義されるが，次は明らかであろう.

Proposition 1.2. 「E がスピン構造をもつ」 $\Longleftrightarrow$ 「$w_2(E) = 0$」

1.2.3　いくつかの同伴束

さてスピン構造があったときに，いくつかの同伴束が作れる．それについて見ていこう.

1. $\mathbf{SO}(M)$ の同伴束として定義した**クリフォード束** $\mathbb{C}l(M)$ **は** $\mathbb{C}l(M) = \mathbf{Spin}(M) \times_{\mathrm{Ad}} \mathbb{C}l_n$ **とかける**.

2. $\mathbf{SO}(M)$ の復元．$\mathrm{Ad}: Spin(n) \to SO(n)$ を使って，$\mathbf{SO}(M) = \mathbf{Spin}(M) \times_{\mathrm{Ad}} SO(n)$ となる．ただし，$(p,h) \in \mathbf{Spin}(M) \times SO(n)$ に対する同値関係を $(p,h) \sim (pg, Ad(g^{-1})h)$ として入れている．このようにすれば，$[p,h]h' = [p,hh']$ として右から $SO(n)$ 作用が定まる主 $SO(n)$ 束となる．そして $\mathbf{SO}(M)$ と一致することがわかる．(ここでの $\mathrm{Ad}(g)h$ は ghg^{-1} のことではない．$\mathrm{Ad}(g) \in SO(n)$ として，$\mathrm{Ad}(g) \cdot h$ としている）

3. クリフォード束２．$Spin(n)$ のクリフォード代数への作用を

$$Spin(n) \times \mathbb{C}l_n \ni (g, \phi) \mapsto l(g)\phi := g \cdot \phi \in \mathbb{C}l_n$$

として定義すれば, $\mathbf{Cl}_{spin}(M) = \mathbf{Spin}(M) \times_l \mathbb{C}l_n$ を定義できる. これは, ファイバーにクリフォード積構造は入らない. しかし**右からクリフォード代数を掛ける**ことができる. 特に，$\mathbf{Spin}(M) \times_l Spin(n) = \mathbf{Spin}(M)$ となる. この $\mathbf{Cl}_{spin}(M)$ は α-genus というスピン同境環の不変量を作る際に用いるものである（[2]「spin geometry」を参照）.

4. **スピノール束**：スピン群のスピノール表現を使って，$\mathbf{S} := \mathbf{Spin}(M) \times_{\Delta_n} W_n$ とする．この同伴ベクトル束をスピノール束とよぶ．n が偶数なら $\mathbf{S}^{\pm} := \mathbf{Spin}(M) \times_{\Delta_n^{\pm}} W_n^{\pm}$ を定義できる.（$\mathbf{S} = \mathbf{S}^+ \oplus \mathbf{S}^-$）.

またこの det **束** $\Lambda^{top}(\mathbf{S})$ を考えるとスピン幾何入門２のスピン c 群の章で述べたことから**自明束**である.（ただし $n \geq 3$ のとき）.

1.3　同伴束上の幾何構造

1.3.1　自明表現と大域的切断

一般の主 G 束に対して役立つ命題を二つ挙げておく．$\mathbf{G}(M) \to M$ を主 G 束として $\mathbf{G}(M)$ の点を p で表し，それを下に落としたものを $x \in M$ と書くことにする．

Proposition 1.3. (π, V) をリー群 G の表現空間とする．また V 上の G **の作用と可換な**幾何的構造があったとする．このとき主 G 束 $\mathbf{G}(M)$ の同伴束 $\mathbf{G}(M) \times_\pi V$ の各ファイバーには *well-defined* に幾何的構造が入る．

Proof. たとえば V 上に G 不変エルミート内積 h が入ったとする．このときエルミートファイバー計量

$$h_x : (\mathbf{G}(M) \times_\pi V) \times (\mathbf{G}(M) \times_\pi V) \ni ([p,u],[p,v]) \mapsto h(u,v) \in \mathbb{C}$$

が入る．G 不変なので well-defined である．■

Example 1.2. クリフォード束 $\mathbb{C}l(M)$ には**各ファイバーにクリフォード積の構造が入った**．これは**クリフォード積が $SO(n)$ の作用と可換だから**である，つまり $\phi, \psi \in \mathbb{C}l_n$, $g \in SO(n)$ としたとき，$(g\phi g^{-1})(g\psi g^{-1}) = g\phi\psi g^{-1}$ が成立．

また $\mathbb{C}l^+ \oplus \mathbb{C}l^-$ という分解も $SO(n)$ の作用と可換なので $\mathbb{C}l(M) = \mathbb{C}l^+(M) \oplus \mathbb{C}l^-(M)$ という分解が成立する．このように $\mathbb{C}l_n$ の構造で $SO(n)$ の作用と可換であるものはすべてクリフォード束 $\mathbb{C}l(M)$ に遺伝する．

Proposition 1.4. (π, V) をリー群 G の表現空間とする．V の中に**自明表現が存在**したとする．このとき同伴束 $\mathbf{G}(M) \times_\pi V$ には**すべての点において零でない切断が存在**する．

Proof. $\mathbb{C} \subset V$ を自明表現とする．このとき $\mathbf{G}(M) \times_\pi \mathbb{C} \subset \mathbf{G}(M) \times_\pi V$ となる部分同伴束が存在する（実ベクトル束なら $\mathbf{G}(M) \times_\rho \mathbb{R}$ を考える）．$s(x) = [p, 1] \in \Gamma(\mathbf{G}(M) \times_\pi \mathbb{C})$ を考えると，これは大域的に定義され，すべての点で零でない． ■

Example 1.3. $\mathbf{SO}(M) \times_{\Lambda^p} \Lambda^p = \Lambda^p(M)$ であることはすぐにわかる，Λ^n **は自明表現と同値**である．$1 \in \mathbb{R}$ に対応するのは $e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$ である．ここで $\{e_i\}$ は $\mathbb{R}^n$ の向きつき正規直交基底である．このときの**標準的な切断** $s(x) = [p, e_1 \wedge \cdots \wedge e_n]$ **はリーマン計量から導かれるリーマン体積要素**である．

同様にして，クリフォード代数の top-form である複素体積要素に $SO(n)$ は自明に作用する．よって大域的に複素体積要素 ω が存在する．

Example 1.4. $SO(n)$ の対称テンソル積表現 $S^2(\mathbb{C}^n)$ には自明表現 $\mathbb{C}$ が含まれる．この基底は $\sum_i e_i \odot e_i$ である．このときの対応する切断 $s(x) = [p, \sum_i e_i \odot e_i]$ は**リーマン計量**である．

Example 1.5. ケーラー多様体を考える．そのユニタリフレーム束を考える．これは主 $U(n)$ 束である．さて，$U(n)$ の表現で $\Lambda^{1,1}$ は自明表現 $\mathbb{C}$ を含む．$V^{1,0} \simeq \Lambda^{0,1}$ の基底を $\{\epsilon_i\}_i$ とし，$V^{0,1} \simeq \Lambda^{1,0}$ の基底を $\{\bar{\epsilon}_i\}_i$ とする．このとき自明表現の基底は $\sqrt{-1}\sum \bar{\epsilon}_i \wedge \epsilon_i$ である．そこで $\Lambda^{1,1}(M)$ には標準的な零でない大域的な切断が存在するが**ケーラー形式**である．

複素構造を複素線形に拡張したとき $J : V^{1,0} \to V^{0,1}$ であった．つまり $J \in \mathrm{Hom}(V^{1,0}, V^{0,1}) = V^{0,1} \otimes (V^{1,0})^* \simeq \Lambda^{1,0} \otimes \Lambda^{0,1} = \Lambda^{1,1}$ である．よって自明表現が存在するが，その基底が J である．そして大域的切断がまさに複素構造であり，ケーラー形式に対応する．

概エルミート多様体を考えた場合でもユニタリフレーム束をつくれ，概ケーラー形式や概複素構造が定まる．しかし，レビチビタ接続は一般に主 $U(n)$ 束の接続に落ちるとは限らないので，概ケーラー形式が平行切断かどうかはわからない．

Example 1.6. ホロノミー群が $SU(n)$ に含まれる多様体を考える．このユニタリフレーム束は主 $SU(n)$ 束に落ちる．$\Lambda^{n,0}$ **は $SU(n)$ の自明表現であり，対応する切断は正則体積要素**と言われるものである．つまり標準束 $K := \Lambda^{n,0}(M)$（正則直線束）のゼロでない正則切断である．そして K は自明束になる．

Remark 1.4.「リッチフラットケーラー多様体」$\Longleftrightarrow$「制限ホロノミー群 $Hol^0(g) \subset SU(n)$」である．よってリッチフラットケーラーなら局所的にはホロノミー $SU(n)$ に入るということである．カラビヤウ多様体の定義もコンパクトリッチケーラー多様体とする論文や，ホロノミー群が $SU(n)$ に入るケーラー多様体とする論文などもあり，定義が論文によって異なることがある．

Example 1.7. ホロノミー群が $Sp(n)$ に入る場合，つまり超ケーラー多様体を考える．E を $Sp(n)$ の自然表現とする．$\Lambda^2(E) = \Lambda^2_0(E) \oplus \mathbb{C}(\sigma)$ であった．よって自明表現が存在する．対応するものは**正則シンプレクティック形式**とよばれるものである（正則は一つ固定した複素構造 I に対するもの）．超ケーラー多様体上には計量と compatible な複素構造 I, J, K で四元数の関係式をみたすものが存在する．対応するケーラー形式を $\omega_I, \omega_J, \omega_K$ としたとき，$\omega_J + i\omega_K$ が複素シンプレクティック形式である．またこれを n 乗したものは上で述べた正則体積要素になる．

また $\Lambda^{1,1}(E) = \Lambda^{1,0}(E) \otimes \Lambda^{0,1}(E) = \Lambda^{1,1}_0(E) \oplus \mathbb{C}$ となるが，この自明表現に対応するのものは複素構造 I に関するケーラー形式である.（$\Lambda^1(E) = \Lambda^{1,0}(E) \simeq \Lambda^{0,1}(E)$ であるが場合によってそれらを区別する必要がある）.

Example 1.8. 四元数ケーラー多様体を考える．このときのフレーム束の構造群は $Sp(n)Sp(1)$ へ縮約する．そこで主 $Sp(n)Sp(1)$ 束を考える．表現空間 $S^k(H) \otimes S^l(H)$ はクレブッシュゴルダンにより次のように分解する．

$$S^{k+l}(H) \oplus S^{k+l-2}(H) \oplus \cdots \oplus S^{|k-l|}(H)$$

例えば

$$S^2(H) \otimes S^2(H) = (S^4(H) \oplus S^0(H)) \oplus S^2(H) = S^2(S^2(H)) \oplus \Lambda^2(S^2(H))$$

が成立する．この $S^0(H)$ は自明表現であり，普遍展開環と対称テンソル積空間をベクトル空間として同一視すれば，カシミール元が入る空間である．

まず $\Lambda^2(E \otimes H)$ を考えると，次の分解が成立する．

$$(S^2(H) \otimes \mathbb{C}(\sigma_E)) \oplus (\mathbb{C}(\sigma_H) \otimes S^2(E)) \oplus \Lambda^2_0(E) \otimes S^2(H)$$

となる．$S^2(H) \simeq \mathfrak{sp}(1, \mathbb{C})$, $S^2(E) \simeq \mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$ であるので $\Lambda^2(H \otimes E) = \mathfrak{so}(4n, \mathbb{C})$ の中に $\mathfrak{sp}(1, \mathbb{C})$ と $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$ が埋め込まれている．上の分解を見ればわかるように $\Lambda^2(E \otimes H)$ の中に自明表現が存在しない．これは一般に四元数ケーラー多様体上には大域的な複素構造が存在しないことを意味している．

スピン幾何入門 2 でみたように $\Lambda^4(E \otimes H)$ の中には $Sp(n)Sp(1)$ 不変な 4-form が存在した．対応する大域的切断は **Kraines 形式**といわれる四元数ケーラー多様体上の実 4-form Ω である．

Remark 1.5. 上で述べた多様体は，フレーム束が縮約して，さらにレビチビタ接続も縮約するものである．よって**上で述べた大域的切断はすべて平行切断**である．

1.3.2 スピノール束上のいくつかの構造

スピノール束上の幾何構造について考えよう．

1. スピノール空間には $Spin(n)$ 不変なエルミート計量が入ったので，**スピノール束** $\mathbf{S}$ **はエルミートベクトル束**である．またこの内積に関して $\mathbf{S}^+$ と $\mathbf{S}^-$ は直交する．

2. 次に，スピノール空間へのクリフォード積は $Spin(n)$ の作用と可換であった．つまり $\psi \in W_n$, $\phi \in \mathbb{C}l_n$, $g \in Spin(n)$ としたとき，
$$g(\phi \cdot \psi) = (g\phi g^{-1})(g\psi)$$
が成立する．このことから $\mathbb{C}l(M)$ は $\mathbf{S}$ に作用する．**つまり** $\mathbf{S}$ **は** $\mathbb{C}l(M)$ **加群である**．よって $\mathbb{C}l(M)$ の切断が $\mathbf{S}$ の切断に作用する．特に，ベクトル場 X は $\Gamma(M, \mathbf{S})$（滑らかな切断の空間）に作用する．

3. スピノール空間上のエルミート内積は $\langle e_i\phi, e_i\psi\rangle = \langle \phi, \psi\rangle$ を満たすのであった．よって $\mathbf{S}$ 上のエルミート内積も同様の性質をみたす．

4. 微分形式もスピノール束に作用させることができる．$w \in \Lambda^p(M)$, $\psi \in \Gamma(M, \mathbf{S})$ に対して，
$$w\psi = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p < n} w(e_{i_1}, \cdots, e_{i_p}) e_{i_1} \cdots e_{i_p} \psi$$
とすればよい．ここで $\{e_i\}_i$ は正規直交フレーム．

5. 大域的な体積要素 ω もスピノール束に作用するが，これも各点での話しがそのまま成立する．例えば体積要素は $\mathbf{S}^{\pm}$ に ± 1 で作用する．

6. スピノール空間には実構造や四元数構造などが入ったが，**対応した構造がスピノール束にも入る**．四元数構造または実構造 $\mathfrak{J}$ があった場合を考える．スピン幾何入門 2 で述べたように normalize すれば $(\mathfrak{J}\psi_1, \mathfrak{J}\psi_2) = (\psi_2, \psi_1)$ をみたす．また四元数構造や実構造から複素シンプレクティック構造や複素内積構造を作るには，
$$\Omega(\psi_1, \psi_2) := (\psi_1, \mathfrak{J}\psi_2) = (\mathfrak{J}^2\psi_2, \mathfrak{J}\psi_1) = \pm\Omega(\psi_2, \psi_1)$$
とすればよい．実際，ψ_1, ψ_2 に対して複素線形であり，
$$\Omega(\psi_1, \psi_2) := (\psi_1, \mathfrak{J}\psi_2) = (\mathfrak{J}^2\psi_2, \mathfrak{J}\psi_1) = \pm\Omega(\psi_2, \psi_1)$$
となる．

   また $\mathfrak{J}$ がクリフォード積と可換の場合には
$$\Omega(e_i\psi_1, \psi_2) = (e_i\psi_1, \mathfrak{J}\psi_2) = -(\psi_1, e_i\mathfrak{J}\psi_2) = -(\psi_1, \mathfrak{J}e_i\psi_2) = -\Omega(\psi_1, e_i\psi_2)$$
が成立し，反可換の場合には $\Omega(e_i\psi_1, \psi_2) = \Omega(\psi_1, e_i\psi_2)$ が成立する．

さて，以上がスピノール束に入る構造であるが，これらを使うことで，いろいろと面白いことができる．例えば，**スピノールから微分形式を作ったり，スピノールに曲率テンソルやリッチテンソルをかける**ことができる（スピン幾何ではかなり重要なテクニックである）．特に，スピノールがそれなりによい性質をみたせば（平行スピノールやキリングスピノールなど），微分幾何への応用がたくさん生まれる．

まず，スピノールからベクトル場を作ってみよう．スピノール場 $\psi \in \Gamma(M, \mathbf{S})$（滑らかな切断の空間）に対して，

$$V^{\psi} := \sum_i \sqrt{-1}(e_i\psi, \psi)e_i = -\sum_i \sqrt{-1}(\psi, e_i\psi)e_i = -\sum_i \sqrt{-1}\;\overline{(e_i\psi, \psi)}e_i = \overline{V^{\psi}}$$

とすれば，これは正規直交フレームのとり方によらないので，**実ベクトル場が定まる**. ただし，$\psi \neq 0$ としても V^{ψ} が零になる可能性はあるので，恒等的に零でないもののみを考える．例えば $\psi \in \mathbf{S}^+$ とすれば $e_i\psi \in \mathbf{S}^-$ であるので $V^{\psi} = 0$ となる．また計量によりベクトル場と 1-from を同一視すればスピノールから 1-form が定まる．より一般に $\psi_1, \psi_2 \in \Gamma(M, \mathbf{S})$ に対して，

$$V^{\psi_1,\psi_2} := \sum_i (e_i\psi_1, \psi_2)e_i$$

により（複素）ベクトル場が定まる．

p 次微分形式をつくるには次のようにすればよい．

$$\begin{aligned} w^{\psi} :&= (\sqrt{-1})^{p(p+1)/2} \sum_{i_1<\cdots<i_p} (e_{i_1}\cdots e_{i_p}\psi, \psi)e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p} \\ &= (\sqrt{-1})^{p(p+1)/2} \sum_{i_1<\cdots<i_p} (-1)^{p(p+1)/2}\overline{(e_{i_1}\cdots e_{i_p}\psi, \psi)}e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p} \\ &= \overline{w^{\psi}} \end{aligned}$$

とすれば**実 p-form が定まる**．べつの書き方をすれば

$$w^{\psi}(X_1, \cdots, X_p) := (\sqrt{-1})^{p(p+1)/2}((X_1\wedge\cdots\wedge X_p)\psi, \psi)$$

とすればよい．

Remark 1.6. 上の表示では，$(X_1\cdots X_p\psi, \phi)$ としては駄目．正規直交基底をつかって表示をすれば，そのような書き方は可能.

Remark 1.7. 四元数構造や実構造を使えば，もっといろいろな微分形式を作ることもできる．

1.3.3　スピノール束に関する注意

スピン構造が異なっても対応するスピノール束が同型となることがある. $\mathbf{Spin}(M)$, $\mathbf{Spin}(M)'$ の推移関数を g_{ij}, g'_{ij} とする．この差を τ_{ij} で表す（$0 \neq \tau = [\tau_{ij}] \in$

$H^1(M,\mathbb{Z}_2)$）．このときスピノール束 $\mathbf{S}$，$\mathbf{S}'$ の推移関数は $\Delta(g_{ij}),\Delta(g'_{ij})$ である．よって $\Delta(g_{ij})=\tau_{ij}\Delta(g'_{ij})$ となるので，複素直線束で推移関数が τ_{ij} となるものを L とすれば，

$$\mathbf{S}\simeq\mathbf{S}'\otimes L$$

となる．このように一般にスピン構造が異なればスピノール束は同型ではないが L が自明束なら同型になるのである．また $\tau_{ij}=\pm1$ なので $L^2=L\otimes L$ は自明束である．

そこで τ に対する直線束 L がいつ自明になるかを調べよう．滑らかな複素直線束全体は推移関数を対応させることにより $H^1(M,\underline{\mathbb{C}^*})$ と一致する．さらに $H^1(M,\underline{\mathbb{C}^*})\simeq H^1(M,\underline{U(1)})\simeq H^2(M,\mathbb{Z})$ が成立する（詳しくは，小林昭七「複素幾何１．２」）．最初の同型は適当にファイバー計量を入れることによる．２番目の同型を証明するには，次の層短完全系列を使う．

$$0\to\mathbb{Z}\xrightarrow{i}\underline{\mathbb{R}}\xrightarrow{\exp 2\pi i}\underline{U(1)}\to 1$$

ここで underline をしているものは，定数層ではなく，関数の層のことである．この完全系列からくるコホモロジー完全系列を使うと，$H^i(M,\underline{\mathbb{R}})=0$（$i\geq 0$）であるので，

$$H^1(M,\underline{U(1)})\simeq H^2(M,\mathbb{Z})$$

が成立する．この同型により複素直線束 L に対して $c_1(L)\in H^2(M,\mathbb{Z})$ が定まるがこれを**複素直線束の第一チャーン類**とよぶ．具体的には次のようにする．それなりによい被覆 $M=\cup_i U_i$ をとって L の推移関数を $g_{ij}:U_i\cap U_j\to U(1)$ とする．$g_{ij}=\exp 2\pi i k_{ij}$ となる $k_{ij}\in\mathbb{R}$ をとる．$g_{ij}g_{jk}g_{ki}=1$ であるで，

$$k_{ij}+k_{jk}+k_{ki}=c_{ijk}\in\mathbb{Z}$$

がさだまる．このとき $c_1(L)=[c_{ijk}]\in H^2(M,\mathbb{Z})$ が定まる．これが第一チャーン類．

Remark 1.8. k_{ij} は $\mathbb{Z}$ 値とは限らないので c_{ijk} はコバウンダリーとは限らない，つまり一般に $[c_{ijk}]\neq 0$ である．k_{ij} のとり方は整数を足す曖昧さがあるが，曖昧さはコバウンダリーであるので同じ $[c_{ijk}]$ を定める．

さて，話をもとにもどしてスピン構造の違い $\tau\in H^1(M,\mathbb{Z}_2)$ を考える．$\mathbb{Z}_2\to U(1)$ とみなすことで $H^1(M,\mathbb{Z}_2)\to H^1(M,\underline{U(1)})=H^2(M,\mathbb{Z})$ という写像を得るが，τ の像がスピノール束の違いに現れる $L\in H^2(M,\mathbb{Z})$ である．そして，場合によっては $\tau\neq 0$ であるが L が自明となることがある．それを見るには，次の層の完全系列

$$0\to\mathbb{Z}\xrightarrow{\times 2}\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_2\to 0$$

を考える．これより次の完全系列を得る．

$$0\to H^1(M,\mathbb{Z})\xrightarrow{\times 2}H^1(M,\mathbb{Z})\xrightarrow{\phi}H^1(M,\mathbb{Z}_2)\xrightarrow{\beta}H^2(M,\mathbb{Z})\xrightarrow{\times 2}H^2(M,\mathbb{Z})$$

をえる．ここで $H^0(M,\mathbb{Z}) \to H^0(M,\mathbb{Z}_2)$ が全射を使った．そこで $\tau \in H^1(M,\mathbb{Z}_2)$ で $\beta(\tau) = L = 0$ となるものは $\phi(H^1(M,\mathbb{Z})) \simeq H^1(M,\mathbb{Z})/2H^1(M,\mathbb{Z})$ で分類される．つまり**一つスピン構造を固定して，$\phi(H^1(M,\mathbb{Z}))$ の元で動かしてもスピノール束は同型**である．

もう少し詳しくみてみよう．スピン構造のところで述べたように，$H^1(M,\mathbb{Z}) = \oplus_{i=1}^p \mathbb{Z}$ とし，$H^1(M,\mathbb{Z}_2) = (\oplus_{i=1}^p \mathbb{Z}_2) \oplus (\oplus_{\{k|m_k=even\}} \mathbb{Z}_2)$ とする．このとき上の写像 ϕ は，$\oplus_{i=1}^p \mathbb{Z}$ の部分を $(\oplus_{i=1}^p \mathbb{Z}_2)$ の部分へ移すものである．つまり $\eta = [\eta_{ij}] \in H^1(M,\mathbb{Z})$ に対して $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2$ により η_{ij} を $\mathbb{Z}_2$ 値であると考えるのであり，$\phi(\eta) = [\exp 2\pi i \eta_{ij}/2] \in H^1(M,\mathbb{Z}_2)$ と表せることになる．また $\eta \in H^1(M,\mathbb{Z})$ であるので $\eta_{ij} + \eta_{jk} + \eta_{ki} = 0$ となる．さて，$\tau \in H^1(M,\mathbb{Z}_2)$ に対して，$\tau_{ij} = \exp 2\pi i k_{ij}$ とすれば，$k_{ij} \in \mathbb{Z} \cup (\mathbb{Z} + 1/2) \subset \mathbb{R}$ となる．そして，$k_{ij} + k_{jk} + k_{ki} = c_{ijk}$ により $c_1(L) = [c_{ijk}] \in H^2(M,\mathbb{Z})$ が定まる．$\tau = \phi(\eta)$ である場合には，$k_{ij} = \eta_{ij}/2$ ととれるが，$c_{ijk} = \eta_{ij}/2 + \eta_{jk}/2 + \eta_{ki}/2 = 0$ となってしまう．

以上をまとめると次の命題を得る．

Proposition 1.5. 多様体 M に対してその一次ホモロジー群を $H_1(M,\mathbb{Z}) = (\oplus_{i=1}^p \mathbb{Z}) \oplus (\oplus_{k=1}^q \mathbb{Z}_{m_k})$ とすれば普遍係数定理から

$$
\begin{aligned}
H^1(M,\mathbb{Z}) &= \oplus_{i=1}^p \mathbb{Z} \\
H^1(M,\mathbb{Z}_2) &= (\oplus_{i=1}^p \mathbb{Z}_2) \oplus (\oplus_{\{k|m_k=even\}} \mathbb{Z}_2)
\end{aligned}
$$

となる．M にスピン構造が存在するとして一つ固定する．このとき $\oplus_{i=1}^p \mathbb{Z}_2$ の部分でスピン構造を動かしてもスピノール束はもとのスピノール束と同型である．一方，$\oplus_{\{k|m_k=even\}} \mathbb{Z}_2$ の部分でスピン構造を動かした場合にはスピノール束はもとのスピノール束とは同型にはならない．特に $H_1(M,\mathbb{Z})$ が捻れ元を持たない場合にはすべてのスピン構造に対するスピノール束は同型になる．

2　スピン c 構造

スピン構造の利点はスピノール束を定義できることであるが $w_2(M)=0$ となる必要がある．スピノール束を定義するだけなら，より弱い条件で成立するスピン c 構造が存在すればよい．そこでスピン c 構造を定義しよう．

2.1　スピン c 構造

Definition 2.1. リーマン多様体 (M,g) 上の主束 $\mathbf{SO}(M)$ を考える. 主 $Spin^c(n)$ 束 $\mathbf{Spin}^c(M)$ が M **のスピン c 構造**とは, 束準同型 Φ で次が可換になるとき.

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbf{Spin}^c(M)\times Spin^c(n) & \xrightarrow{\Phi\times\mathrm{Ad}} & \mathbf{SO}(M)\times SO(n)\\
\downarrow & & \downarrow\\
\mathbf{Spin}^c(M) & \xrightarrow{\Phi} & \mathbf{SO}(M)\\
\downarrow & & \downarrow\\
M & \xrightarrow{=} & M
\end{array}
$$

またスピン c 構造が存在する多様体を**スピン c 多様体**とよぶ.

スピン c 構造が存在したとする．簡単のため $P=\mathbf{Spin}^c(M)$ とする． $Q:=P/U(1)=P\times_{\mathrm{Ad}}SO(n)$ は構造群が $Spin(n)/\{\pm1\}=SO(n)$ の主束で $\mathbf{SO}(M)$ となる. また $P_1:=P/Spin(n)=P\times_l U(1)$ は構造群が $U(1)/\{\pm1\}=U(1)$ となる主 $U(1)$ 束である（$l([g,z]):=z^2$）. このとき主 $SO(n)\times U(1)$ 束 $Q\tilde{\times}P_1$ を得る（$\tilde{\times}$ は主束として積を表す）. そしてスピン c 構造 Φ から次の束準同型 $\tilde{\Phi}$ を得る.

$$
\begin{array}{ccc}
P\times Spin^c(n) & \xrightarrow{\tilde{\Phi}\times p} & (Q\tilde{\times}P_1)\times(SO(n)\times U(1))\\
\downarrow & & \downarrow\\
P & \xrightarrow{\tilde{\Phi}} & Q\tilde{\times}P_1\\
\downarrow & & \downarrow\\
M & \xrightarrow{=} & M
\end{array}
\tag{2.1}
$$

ここで $p([g,z])=(\mathrm{Ad}([g,z]),l([g,z]))$ である．この $\tilde{\Phi}:P\to Q\tilde{\times}P_1$ は 2 重被覆になるが次が成立する.

Proposition 2.1. 主 $SO(n)$ 束 Q がスピン c 構造を持つなら, $Q\tilde{\times}P_1$ がスピン構造を持つ（M のスピン構造ではなく $Q\tilde{\times}P_1$ のスピン構造）. 逆に, 勝手な主 $U(1)$ 束 P_1 で $Q\tilde{\times}P_1$ がスピン構造を持つものが存在すれば Q はスピン c 構造をもつ.

Proof. 局所的にはスピン幾何入門 2 のスピン c 群の章で述べたことである．それを思い出そう．

$$\mathbb{R}^n \ni e_i \mapsto e_i \in \mathbb{R}^{n+2}$$

を拡張して $Cl_n \subset Cl_{n+2}$ 及び $Spin(n) \subset Spin(n+2)$ を得る．$\mathfrak{spin}(n+2)$ の元 $e_{n+1}e_{n+2}$ をとり，$\exp e_{n+1}e_{n+2}t$ を $U(1)$ と見なす．つまり $(e_{n+1}e_{n+2})^2 = -1$ で e_ie_j（$1 \le i < j \le n$）とは可換なので $e_{n+1}e_{n+2}$ を $\sqrt{-1}$ と見なすのである. よって $(Spin(n) \times U(1))/\{\pm 1\} \subset Spin(n+2)$ を得る. このとき次の可換図式が成立した.

$$\begin{array}{ccc} Spin^c(n) & \xrightarrow{f} & Spin(n+2) \\ \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Ad}} \\ SO(n) \times U(1) = SO(n) \times SO(2) & \xrightarrow{i} & SO(n+2) \end{array}$$

さて，スピン c 構造 P が存在するとする. 主 $SO(n) \times SO(2)$ 束 $Q\tilde{\times}P_1$ を $SO(n) \times SO(2) \subset SO(n+2)$ により主 $SO(n+2)$ 束と見なしたとき, 2 重被覆 P が存在することになるが, $Spin^c(c) \subset Spin(n+2)$ により P は主 $Spin(n+2)$ 束とみなせる. そして $\tilde{\Phi}$ はスピン構造となる. 逆に, ある主 $U(1)$ 束 P_1 が存在して, $Q\tilde{\times}P_1$ がスピン構造を持つとする.$SO(n) \times U(1)$ の二重被覆は $Spin^c(n)$ であったので主 $Spin^c(n)$ 束の存在がわかる．よって $Q\tilde{\times}P_1$ の 2 重被覆で図式 (2.1) が可換になるものが存在することを意味する. つまりスピン c 構造をもつ. ■

Corollary 2.2. スピン c 構造が存在するためには $w_2(Q\tilde{\times}P_1) = 0$ となる主 $U(1)$ 束 P_1 が存在することが必要十分．よって $w_2(Q) = w_2(M) \equiv c_1(P_1)\mathrm{mod}2$ となる P_1 の存在が必要十分である．

Proof. 最初の主張はすぐにわかる．二番目の主張は w_2 と c_1 の関係が必要である．まずスティーフェルホイットニー類の性質と $w_1(P_1) = w_1(Q) = 0$ を使って $w_2(Q\tilde{\times}P) = w_2(Q) + w_2(P_1)$ となる．よって $w_2(Q) = w_2(P_1)$ である.（$w_2(P_1)$ は主 $U(1)$ 束 P_1 を $U(1) = SO(2)$ により主 $SO(2)$ 束とみなしたときの $w_2(P_1)$ であり，普通は $w_2((P_1)_{\mathbb{R}})$ などと書く）.

そこで主 $U(1)$ 束 P_1 に対して $w_2(P_1) \equiv c_1(P_1) \mod 2$ を証明しよう．主 $U(1)$ 束の第一チャーン類の定義を思い出す．推移関数を $g_{ij} : U_i \cap U_j \to U(1)$ としたとき，$g_{ij} = \exp 2\pi i k_{ij}$ を考え，

$$k_{ij} + k_{jk} + k_{ki} = c_{ijk} \in \mathbb{Z}$$

により第一チャーン類 $c_1(P_1) = [c_{ijk}]$ が定まる．これを $mod2$ するということは

$$[\exp i\pi c_{ijk}] = [\exp \pi i k_{ij} \exp \pi i k_{jk} \exp \pi i k_{ki}] \in H^2(M, \mathbb{Z}_2)$$

のことである．一方 $h_{ij}^2 = g_{ij}$ となる関数 h_{ij} をとり

$$h_{ij}h_{jk}h_{ki} = w_{ijk}$$

としたものが $w_2(P_1)$ であった．そこで $h_{ij} = \exp \pi i k_{ij}$ ととれば，$c_1(P_1) \equiv w_2(P_1)$ mod 2 となることがわかる．

Remark 2.1. 一般に**複素ベクトル束 E に対して，それを実ベクトル束とみなしたものを $E_{\mathbb{R}}$ とすれば，**$w_{2i}(E_{\mathbb{R}}) = c_i(E) \mod 2$**，**$w_{2i+1}(E_{\mathbb{R}}) = 0$ **が成立する**.

■

主 $U(1)$ 束の全体 $H^1(M, U(1))$ は第一チャーン類を対応させることで $H^2(M, \mathbb{Z})$ と同型であるので,

Corollary 2.3. **スピン c 構造が存在するための必要十分条件は** $z \in H^2(M, \mathbb{Z})$ **で** $w_2(M) \equiv z \mod 2$ **となるものが存在する**こと.

2.2 スピン c 構造の同値類

スピン c 構造の同値類は次で定義する.

Definition 2.2. **スピン c 構造** (P, Φ)，(P', ϕ') **が同値**とは主 $Spin^c(n)$ 束の同型 $\Psi : P \to P'$ で

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\Psi} & P' \\ {\scriptstyle\Phi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\Phi'} \\ Q & \xrightarrow{=} & Q \end{array} \tag{2.2}$$

を可換にするものが存在するときをいう. またこのとき主 $U(1)$ 束の同型 $\psi : P_1 \to P_1'$ を得る（この写像は id とは限らない, 主束の同型である）.

Proposition 2.4. $Q = \mathbf{SO}(M)$ に対してあるスピン c 構造が存在するとき, **スピン c 構造の同値類は** $H^2(M, \mathbb{Z})$ **で分類**できる.

Proof. スピン c 構造があれば, $c_1(P_1) \in H^2(M, \mathbb{Z})$ such that $w_2(Q) \equiv c_1(P_1) \mod 2$ となるものが決まる. そこで二つのスピン c 構造から定まる主 $U(1)$ 束 P_1, P_1' に対して，$c_1(P_1), c_1(P_1')$ が異なるクラスならば対応する主 $U(1)$ 束の同型 $\psi : P_1 \to P_1'$ が作れないので, 異なるスピン c 構造となる.

次に $w_2(Q) \equiv \alpha \mod 2$ となる $\alpha = c_1(P_1)$ を一つ固定する．このとき $Q\tilde{\times}P_1$ が得られる（この主 $SO(n) \times SO(2)$ 束がスピン構造をもつ $\Longleftrightarrow$ Q 上スピン c 構造が存在）. 普通のスピン構造のときと同様に $Q\tilde{\times}P_1$ の 2 重被覆の同値類は $H^1(M, \mathbb{Z}_2)$ で分類される. しかし, 二つの $Q\tilde{\times}P_1$ の 2 重被覆があって，それらが異なる場合でも, (2.2) のような主束の同型は存在するかもしれない. つまり, つぎのような Ψ が存在する場合には同じスピン c 構造とみなされる.

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\Psi} & P' \\ {\scriptstyle\Phi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\Phi'} \\ Q\tilde{\times}P_1 & \xrightarrow{Id\times\psi} & Q\tilde{\times}P_1 \\ {\scriptstyle\pi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi_1} \\ Q & \xrightarrow{Id} & Q \end{array}$$

（この図の意味は, P, P' は Q のスピン c 構造としては同値であるが, $Q\tilde{\times}P_1$ のスピン構造としては異なるということを表している. ψ は Ψ から導かれる主束同型. もちろん $\psi = Id$ となる場合は $Q\tilde{\times}P_1$ のスピン構造として同値になる）. 以上のことに注意して, スピン c 構造の分類を行う.

$\mathbf{SO}(M)$ の変換関数を $g_{ij}(x) \in SO(n)$ としたとき, スピン c 構造は $k_{ij}(x) = [h_{ij}(x), z_{ij}(x)] \in Spin^c(n)$ という cocycle で，かつ $\mathrm{Ad}(h_{ij}) = g_{ij}$ となるものである. また二つのスピン c 構造 $k_{ij} = [h_{ij}(x), z_{ij}(x)]$, $k'_{ij} = [h'_{ij}(x), z'_{ij}(x)]$ が同値とは, $k'_{ij}k_{ij}^{-1}$ が cobundary で $\mathrm{Ad}(h_{ij}) = \mathrm{Ad}(h'_{ij}) = g_{ij}$ となるときを言う. そこで h'_{ij} **を** h_{ij} **にして，その差を** z'_{ij} **のほうに繰り込める**ので, **二つのスピン c 構造** $k_{ij} = [h_{ij}, z_{ij}]$, $k'_{ij} = [h_{ij}, z'_{ij}]$ **が同値であるとは** $z'_{ij}z_{ij}^{-1}$ **が cobundary であることと同値**である. このときもちろん P_1 と P'_1 の変換関数は z_{ij}^2, $(z'_{ij})^2$ であり, これも cobundary であるので $P_1 \simeq P'_1$ となる．また二つのスピン c 構造 $k_{ij} = [h_{ij}, z_{ij}]$, $k'_{ij} = [h_{ij}, z'_{ij}]$ があったときに，その差は $z'_{ij}z_{ij}^{-1}$ であるので $H^1(M, \underline{U(1)})$ で分類される．**よって** $H^2(M, \mathbb{Z})$ **でスピン c 構造が分類される**のである.

以上のことをより正確に述べよう．二つのスピン c 構造から決まる P_1 が同型であるとする．この場合に，二つのスピン c 構造が異なるとは, z_{ij}^2 と $(z'_{ij})^2$ が同じ類つまり $z_{ij}^{-2}(z'_{ij})^2$ が cobundary であるが, $z'_{ij}z_{ij}^{-1}$ が cobundary でないものである. そこで

$$1 \to \mathbb{Z}_2 \to \underline{U(1)} \xrightarrow{z \mapsto z^2} \underline{U(1)} \to 1$$

から,

$$H^0(M, \underline{U(1)}) \xrightarrow{a} H^1(M, \mathbb{Z}_2) \to H^1(M, \underline{U(1)}) \xrightarrow{b} H^1(M, \underline{U(1)}) \to$$

を得る. よって P_1 を固定したときのスピン c 構造は $\ker b$ で分類される. 言い換えれば，**ある直線束** L **で** L^2 **が自明束となるもの**である.

これを，M の $\mathbb{Z}$ 係数コホモロジーの言葉で言い直そう．スピン構造に対するスピノール束で述べたことを思い出す．完全系列

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\exp \pi\sqrt{-1}(\cdot)} \mathbb{Z}_2 \to 0$$

から，コホモロジー完全系列

$$\begin{gathered} 0 \to H^1(M, \mathbb{Z}) \xrightarrow{2} H^1(M, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\phi} H^1(M, \mathbb{Z}_2) \\ \xrightarrow{\beta} H^2(M, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\psi} H^2(M, \mathbb{Z}) \to H^2(M, \mathbb{Z}_2) \cdots \end{gathered}$$

が得られるのであった．そこで直線束 L で L^2 が自明束となるものは，この完全系列で考えれば $\ker b$ とは $c_1(L)$ に対して $2c_1(L) = 0$ となるものであり，$\ker \psi$ に対応する.

一方，　スピン c 構造に対して対応する P_1 が同型とならないもののとり方は

$$\{\alpha \in H^2(M, \mathbb{Z}) | \alpha = w_2(M) \mathrm{mod} 2\} \simeq \mathrm{im}\psi$$

である．以上からスピン c 構造の同値類は $\mathrm{im}\psi \oplus \ker \psi = H^2(M, \mathbb{Z})$. ■

Corollary 2.5. 二つのスピンc構造 $\mathbf{Spin}^c(M)$, $\mathbf{Spin}^c(M)'$ が存在したとする．このとき $L \in H^1(M, \underline{U(1)}) = H^2(M, \mathbb{Z})$ が存在して $\mathbf{Spin}^c(M) \otimes L = \mathbf{Spin}^c(M)'$ となる．ここでテンソル積の意味は $\mathbf{Spin}^c(M)$ の推移関数を $k_{ij} = h_{ij} \otimes z_{ij} \in Spin^c(n)$, L の推移関数を w_{ij} としたときに，$k_{ij}w_{ij} = h_{ij} \otimes z_{ij}w_{ij} \in Spin^c(n)$ とすることを意味する．さらにこのとき $P_1 \otimes L^2 = P_1'$ となる．逆に，スピンc構造 $\mathbf{Spin}^c(M)$ があったときに自明でない主 $U(1)$ 束 L をテンソルすれば $\mathbf{Spin}^c(M) \otimes L$ は同値でないスピン c 構造を与える．

Example 2.1. 上の証明において，最終的に必要な部分は

$$H^1(M, \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\beta} H^2(M, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\psi} H^2(M, \mathbb{Z})$$

である．また ψ は定義から $\psi = \times 2$ である．$H^2(M, \mathbb{Z})$ は $(\oplus\mathbb{Z}) \oplus (\oplus_i \mathbb{Z}_{n_i})$ と書けるが，$\times 2$ して零となるのは，$\mathbb{Z}_{2k} = \{0, 1, \cdots, 2k-1\}$ の元 k である（またはそのような元を足したもの）．よって $H^2(M, \mathbb{Z})$ が $\mathbb{Z}_{2k}$ を持たなければ，$\ker\psi = 0$ であるので，スピンc構造は

$$\{\alpha \in H^2(M, \mathbb{Z}) | \alpha = w_2(M) \mathrm{mod} 2\}$$

で分類される．そして，この場合には対応する P_1 はすべて異なる．

例えば，M が単連結であるなら，普遍係数定理から $H^2(M, \mathbb{Z})$ の捻れ元は存在しない．

Proof. 普遍係数定理とは

$$H^n(M, \mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Hom}(H_n(M, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \oplus Ext(H_{n-1}(M, \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$$

であった．そこで M が単連結なら

$$H^2(M, \mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Hom}(H_2(M, \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$$

となり，$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}) = 0$, $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ を使えば，torsion 元はないことになる． ■

Example 2.2. $H^2(M, \mathbb{Z}) = \oplus\mathbb{Z}_2$ であるとする．このときには，スピンc構造の全体は二乗して自明束となる直線束の同値類全体と一致する．

2.2.1 スピン構造とスピンc構造

多様体にスピン構造が入った場合には，自然なスピンc構造を入れることができる．実際 $\mathbf{Spin}(M) \times_i Spin^c(n)$ を考えれば，これはスピンc構造である．これを**標準的なスピンc構造**とよぶ．さらに**この場合の P_1 は自明束**である．そこで，他のスピンc構造を $\mathbf{Spin}^c(M)' = \mathbf{Spin}(M) \otimes L$ と書いたときには，$P_1' = L^2$ とな

る．つまり勝手なスピン c 構造に随伴した直線束（または主 $U(1)$ 束）P_1' に対して直線束 $L = \sqrt{P_1'}$ が定まる．ここで $\sqrt{P_1'}$ は $\sqrt{P_1'}^2 = P_1'$ となるもの．もちろんこのような直線束のとり方は一つではないが，そのとり方は，随伴直線束が P_1' となるスピン c 構造に対応していることになる．

Proposition 2.6. スピン多様体はスピン c 多様体である．そしてスピン構造から標準的にスピン c 構造が定まる．

Example 2.3. $H^2(M, \mathbb{Z})$ が $\mathbb{Z}_2$ 捻れ元（２倍してゼロになるもの）をもたないとする．このとき二つのスピン構造が異なっても標準的スピン c 構造は同値である．

Proof. 二つのスピン構造の随伴する直線束はどちらも自明束である．そこで，このスピン c 構造の違いは，二乗して零になる直線束で表せる．しかし，$\mathbb{Z}_2$ 捻れ元がないので，そのようなものは自明束しかない．よってスピン c 構造は同値である． ■

2.3 スピン c 構造に付随した同伴束

スピン c 構造に付随した同伴束に付いて述べる．

1. まず，クリフォード束 $\mathbb{C}l(M)$ はスピン c 構造がなくても定義されるのであった．スピン c 構造 $\mathbf{Spin}^c(M)$ の同伴束として書くならば $\mathbb{C}l(M) = \mathbf{Spin}^c(M) \times_{\mathrm{Ad}} \mathbb{C}l$ となる．

2. $\mathbf{SO}(M)$ は，$\mathbf{Spin}^c(M) \times_{\mathrm{Ad}} SO(n)$ である（上の記号で Q と書いたもの）．

3. スピン c 構造に随伴した主 $U(1)$ 束 P_1 は $P_1 := \mathbf{Spin}^c(M) \times_l U(1)$ である．主 $U(1)$ 束の同型類と複素直線束の同型類は（計量を無視すれば）一致するので，P_1 に対して唯一つ直線束が定まる．主 $U(1)$ 束の同伴束であるのでエルミート内積を入れることができる．つまりエルミート直線束である．**この直線束も同じ記号 P_1 で書く**ことにする．

4. スピノール束を定義する．スピン c 群のスピノール表現を考えればスピノール束 $\mathbf{S} = \mathbf{Spin}^c(M) \times_{\Delta_n} W_n$ を定義できる．同様に n が偶数のとき $\mathbf{S}^{\pm}$ を定義できる．

   さらに，このスピノール束の determinant line bundle つまり $\Lambda^{top}\mathbf{S}$, $\Lambda^{top}\mathbf{S}^{\pm}$ を作ることができる．この場合にはスピン構造の時と異なり，自明束になるとは限らない．

   そしてスピン幾何入門２で見たように

$$\det(\Delta_{2m+1}(g \otimes z)) = z^{2^m}, \quad \det(\Delta_{2m}^{\pm}(g \otimes z)) = z^{2^{m-1}}$$

である．このとき，直線束 P_1 との関係は，$l(g \otimes z) = z^2$ であったので，

$$P_1^{2^{m-1}} = \Lambda^{2^m}(\mathbf{S}), \quad P_1^{2^{m-2}} = \Lambda^{2^{m-1}}(\mathbf{S}^{\pm})$$

となる．

特に $n = 3$ のとき $P_1 = \Lambda^2(\mathbf{S})$ であり，$n = 4$ のとき $P_1 = \Lambda^2(\mathbf{S}^{\pm})$ である．これがサイバーグウィッテン理論で，P_1 を det 束という理由である．

Remark 2.2. $n = 2$ のときは，別に議論する必要がある．スピン構造に対するスピノール束の det 束が自明とは限らない．

2.3.1 スピノール束上の幾何構造

スピノール束には，**クリフォード積の構造が入る**．つまり S は $\mathbb{C}l(M)$ 加群ベクトル束である．これは $g \otimes z \in Spin^c(n)$, $\phi \in \mathbb{C}l_n$, $v \in W_n$ としたとき

$$\Delta_n^c(g \otimes z)(\phi \cdot v) = z\Delta_n(g)(\phi \cdot v) = z(g\phi g^{-1})\Delta_n(g)v = (\mathrm{Ad}(g)\phi)(\Delta_n^c(g \otimes z)v)$$

となることからわかる．

次にスピノール束上のエルミート内積について考える．W_n 上には $(e_i v, e_i w) = (v, w)$ となるエルミート内積が入るのであった．特にスピン群の作用と可換である．つまり $(\Delta_n(g)v, \Delta_n(g)w) = (v, w)$ が成立する．スピン c 群の作用で考えると $z \in U(1)$ **であることから**

$$(z\Delta_n(g)v, z\Delta_n(g)w) = (\bar{z}z\Delta_n(g)v, \Delta_n(g)w) = (v, w)$$

となる．つまり**スピノール表現の内積はスピン c 群の作用とも可換**（つまりスピン c 群のユニタリ表現になっている）．よって，**スピノール束 S にも，エルミート内積が入る**．

また，スピノール束上の四元数構造や実構造はスピン c 群と可換でないので，そのような構造は一般に入らない．もちろんスピン構造から標準的に決まるスピン c 構造に対するスピノール束には入る．

スピノール場からベクトル場や微分形式をつくることができたが，スピン c 構造の場合にもそれは可能である．

2.3.2 スピノール束に関する注意

次にスピン c 構造が二つある場合のスピノール束の違いについてみていく．スピン c 構造が二つあるとして推移関数を $k_{ij} = [h_{ij}, z_{ij}]$, $k_{ij} = [h_{ij}, z'_{ij}]$ としておく．このときのスピノール束 $\mathbf{S}, \mathbf{S}'$ の推移関数は，それぞれ $z_{ij}\Delta_n(h_{ij})$, $z'_{ij}\Delta_n(h_{ij})$ である．つまり $\mathbf{S}, \mathbf{S}'$ の違いは $z_{ij}^{-1}z'_{ij}$ で決まる，直線束である．

そこで二つのスピンｃ構造の差を直線束 L で表す．**つまり** $\mathbf{Spin}^c(M)\otimes L = \mathbf{Spin}^c(M)$ **とする．このとき** $\mathbf{S}\otimes L = \mathbf{S}'$ **となる**.（スピン構造の場合には L^2 が自明束となったが，今回はそうとは限らない）このように対応するスピノール束は異なる．L が自明となればスピノール束は同型になるが，L が自明ということはスピンｃ構造が同値であることを意味する．

Proposition 2.7. 異なるスピンｃ構造に対するスピノール束は同型でない．

Remark 2.3. det 束をとれば,

$$P_1^{2^{m-1}}\otimes L^{2^m} = \Lambda^{2^m}(\mathbf{S})\otimes\Lambda^{2^m}(L) = \Lambda^{2^m}(\mathbf{S}\otimes L) = \Lambda^{2^m}(\mathbf{S}') = P_1'^{2^{m-1}}$$

となるが，$P_1\otimes L^2 = P_1'$ であることに矛盾しない．

3　いろいろなスピン構造，スピンｃ構造

この章では，スピン構造やスピンｃ構造が入る多様体を紹介する．さらに，そのスピノール束について学ぶ．

3.1　幾何構造とスピン構造，スピンｃ構造，スピノール束

幾何構造が入った場合のスピン構造やスピンｃ構造について考える．リーマン多様体で主フレーム束が他のリー群 $G\subset SO(n)$ に落ちる場合を考える．スピン幾何入門２で見たように，次のような可換図式をみたすリフトが存在すれば，スピン構造が存在するのであった．

$$\begin{array}{ccc} & & Spin(n) \\ & F\nearrow & \downarrow \mathrm{Ad} \\ G = Hol(M,g) & \xrightarrow{i} & SO(n) \end{array}$$

スピンｃ構造についても同様である．上の図式で，ホロノミー群が縮約するのでなく，構造群が G に縮約する場合でも通用する．しかし，リーマン接続も縮約している場合の方がいろいろと応用がある．

以下で幾何構造がある場合のスピン構造，スピンｃ構造について考えていく．

3.2　概エルミート多様体，ケーラー多様体

3.2.1　スピンｃ構造

概エルミート多様体とはリーマン計量と compatible な概複素構造が入る多様体である．概複素構造から標準的な向きがきまる．よってフレーム束の構造群は $U(n)$

となる．また**エルミート多様体**とは，概エルミート多様体で概複素構造が可積分なものである．さらに，レビチビタ接続も $U(n)$ へ縮約する場合を**ケーラー多様体**とよぶ．どれも，**フレーム群の構造群は** $U(n)$ **である**．そこで，これらの多様体上のスピン構造やスピンｃ構造について議論する．

まず，$U(n)$ についてはスピンｃ群への自然なリフトが存在するので，スピンｃ構造が存在する．

$$\begin{array}{ccc} & & Spin^c(n) \\ & F\nearrow & \downarrow \mathrm{Ad}\times l \\ U(n) & \xrightarrow{i\times\det} & SO(2n)\times U(1) \end{array}$$

さらに，このときのスピノール束はスピン幾何入門２で議論したことから

$$\mathbf{S} = \oplus_p \Lambda^{0,p}(M), \quad \mathbf{S}^+ = \oplus_q \Lambda^{0,2q}(M), \quad \mathbf{S}^- = \oplus_q \Lambda^{0,2q+1}(M)$$

と分解することがわかる．ここで $\Lambda^{0,p}(M)$ は主 $U(n)$ 束の同伴ベクトル束であり，これは概エルミート多様体でも定義できる．さらに，この場合の随伴直線束は $\Lambda^{0,n}(M) \simeq \Lambda^n T^{1,0}(M)$ である（$l(g\otimes z) = \det A$ であったので）．つまり標準直線束 $K = \Lambda^{n,0}(M)$ の逆元（$H^1(M, \underline{U(1)})$ は群）である．$P_1 = \Lambda^{0,n}(M) = K^{-1}$．そして $w_2(M) \equiv c_1(K^{-1}) \equiv c_1(K) \mod 2$ が成立する．

Remark 3.1. $w_2(M) \equiv c_1(K) \mod 2$ であることがわかったが，別証明を与えておく．まず一般に複素ベクトル束 E があったとき $w_2(E_{\mathbb{R}}) = c_1(E) \mod 2$ である．また $E = T^{1,0}(M)$ とする．$c_1(T^{1,0}(M)) = c_1(K^{-1}) = -c_1(K)$ となる．$T^{1,0}(M) \simeq (TM, J)$ であるので $T^{1,0}(M)_{\mathbb{R}} = TM$ である，よって $w_2(TM) \equiv -c_1(K) \equiv c_1(K) \mod 2$ が成立．**また** $c_1(M) = -c_1(K)$ **である**ことに注意する．

Proposition 3.1. 概エルミート多様体には標準的なスピンｃ構造 $\mathrm{Spin}^c_o(M)$ が存在する．さらにスピノール束は $\mathrm{S} = \oplus_p \Lambda^{0,p}(M)$ となる．

別のスピンｃ構造 $\mathbf{Spin}^c(M)'$ があったとして，標準的なものとの差が L であるとする．この L は一般に主 $U(n)$ 束の同伴束とは限らない．このときスピノール束は

$$\mathbf{S}' = \oplus_p \Lambda^{0,p}(M) \otimes L$$

となる．

Example 3.1. 次の可換図式をみたすようなリフトも存在した．

$$\begin{array}{ccc} & & Spin^c(n) \\ & F_k\nearrow & \downarrow \mathrm{Ad}\times l \\ U(n) & \xrightarrow{i\times\det^{2k+1}} & SO(2n)\times U(1) \end{array}$$

この場合には $P_1 \otimes L^2 = P_1' = P_1^{2k+1}$ である．つまり $L^2 = P_1^{2k}$ となる．実際 $L = P_1^k = K^{-k}$ であることがわかる（演習問題）．この場合の標準的スピン c 構造との違いは同伴束であらわせれる．そこでスピノール束は

$$\mathbf{S}' = \oplus_p \Lambda^{0,p}(M) \otimes K^{-k} = \oplus_p \Lambda^{0,p}(M) \otimes (\Lambda^{0,n}(M))^k$$

$\Lambda^{0,p}(M) \otimes (\Lambda^{0,n}(M))^k$ は既約同伴束であるが，対応する highest weight は $(1_p, 0) + (k_n)$ である．例えば，$k = -1$ の場合には，$\Lambda^{0,p}(M) \otimes (\Lambda^{0,n}(M))^{-1} = \Lambda^{n-p,0}(M)$ となる．つまり $\mathbf{S} = \oplus \Lambda^{p,0}(M)$ となる．

3.2.2 スピン構造

次にスピン構造について考えよう．一般に概エルミート多様体にはスピン構造は存在しない．上で見たように $w_2(M) \equiv c_1(K) \mod 2$ である．そこで**スピン構造が存在するためには** $c_1(K) \equiv 0 \mod 2$**（**$c_1(M) \equiv 0 \mod 2$**）となることが必要十分**である．

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\exp \pi i} \mathbb{Z}_2 \to 0$$

という完全系列から導かれる

$$H^1(M, \mathbb{Z}) \to H^1(M, \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\beta} H^2(M, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\times 2} H^2(M, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\psi} H^2(M, \mathbb{Z}_2) \to$$

という完全系列を考える．$c_1(K) \in H^2(M, \mathbb{Z})$ の元とする．このとき $\mod 2$ で零とは $\psi(c_1(K)) = 0$ となることである．よって，$c_1(K) \in 2H^2(M, \mathbb{Z})$ である．つまり，$c_1(K)/2 \in H^2(M, \mathbb{Z})$ ならよい（K に対して $\sqrt{K}$ が存在）．もちろん，このような**二乗根のとり方は一つではない**．実際 $H^1(M, \mathbb{Z}_2)$ の元 $z = [z_{ij}]$ をとって，$\beta(z) + c_1(K)/2$ を考えると，これは $2(\beta(z) + c_1(K)/2) = c_1(K)$ となるので，他の二乗根に対応する．

スピノール束を考えてみる．$\sqrt{K}$ を一つとってきて，そこから決まるスピン構造を考え，さらにスピン c 構造 $\mathbf{Spin}(M) \times_i Spin^c(n)$ を考える．一方で概エルミート多様体にある標準的なスピン c 構造 $\mathbf{Spin}_o^c(M)$ を考える．このとき $\mathbf{Spin}(M) \times_i Spin^c(n) = \mathbf{Spin}_o^c(M) \otimes \sqrt{K}$ となることがわかる．よってスピノール束は

$$\mathbf{S}' = \oplus \Lambda^{0,p}(M) \otimes \sqrt{K}$$

となる．

さて，スピン構造は $H^1(M, \mathbb{Z}_2)$ で決まるのであった．一つ $\sqrt{K}$ を固定する．上でみたように，$\sqrt{K} + \beta(H^1(M, \mathbb{Z}_2))$ によって K の二乗根直線束は分類される．しかし，$z \in H^1(M, \mathbb{Z}_2)$ かつ $\beta(z) = 0$ となるものに対しては同じ $\sqrt{K}$ を与える．そしてこのときは，スピノール束は同型になる．つまりスピン構造は異なるのだがスピノール束は同型になるものである．

Proposition 3.2. **概エルミート多様体上にスピン構造が存在するための必要十分条件は $\sqrt{K}$ が存在すること**．ここで K は $\Lambda^{n,0}(M)$ のこと．また $\sqrt{K}$ は $\sqrt{K}^2 = \sqrt{K}\otimes\sqrt{K} = K$ となる直線束．このとき，スピノール束は

$$\mathbf{S} = \oplus_p(\Lambda^{0,p}(M)\otimes\sqrt{K})$$

となる．

また $\sqrt{K}$ **のとり方は一つではない**．さらに $\sqrt{K}$ **が定まったとしてもスピン構造が異なる場合がある**．

Example 3.2. 構造群が $SU(n)$ に落ちる場合を考える．このときには $K = \Lambda^{n,0}(M)$ という同伴束は自明表現に対応するので自明束である．よってこの場合には $\sqrt{K}$ として自明束をとることができるので，**スピン構造は必ず存在**する．これは

$$\begin{array}{ccc} & & Spin(n) \\ & F\nearrow & \downarrow \mathrm{Ad} \\ SU(n) & \xrightarrow{i} & SO(2n) \end{array}$$

という図式からくるものである．そしてスピノール束は $\mathbf{S} = \oplus_p\Lambda^{0,p}(M)$ である．また標準的スピン c 構造はこのスピン構造と一致する．

3.2.3 スピノール束

スピン幾何入門 2 で述べた $U(n)$ のスピノール表現を，このスピノール束に拡張してみる．概エルミート多様体上には，$\Omega(X,Y) = g(IX,Y)$ とすることで実 $(1,1)$ 形式が定まる（ケーラー多様体ならケーラー形式）．この Ω をスピノール表現に作用させるときには，$\Omega = \sqrt{-1}(2N-n)$ で作用するのであった（N は数作用素）．そしてスピノール空間 W を粒子の数で分解し $W = \oplus W^p$ と分解したとき $W^p = \Lambda^{0,p}\otimes\sqrt{\Lambda^{n,0}}$ となる．よってこの空間には Ω は $\sqrt{-1}(2p-n)$ で作用する．さらに，$\overline{W^p} = W^{n-p}$ であった．以上のことはスピノール束にそのまま持ち上がる．つまり

$$\mathbf{S}^p := \Lambda^{0,p}(M)\otimes\sqrt{K}$$

とすれば，Ω は $\sqrt{-1}(2p-n)\mathrm{id}$ として作用する．さらに

$$\overline{\mathbf{S}^p} = \mathbf{S}^{n-p}$$

が成立する．また $\mathbf{S}^0$，$\mathbf{S}^n$ はどちらも直線束であり，$\mathbf{S}^0 = \sqrt{K}, \mathbf{S}^n = K^{-1}\otimes\sqrt{K} = \sqrt{K^{-1}} = (\mathbf{S}^0)^*$ が成立する．これらの直線束には Ω が $-\sqrt{-1}n, \sqrt{-1}n$ で作用する．

Remark 3.2. $\overline{\mathbf{S}^p} = \mathbf{S}^{n-p}$ は次のようにしても証明できる．今偶数次元多様体を考えているので，スピノール表現には，スピン群の作用と可換，そして Ω の作用と可換な実構造または四元数構造が入る．それを $\mathfrak{J}$ とする．このとき $\phi\in\mathbf{S}^p$ に対して

$$\Omega\mathfrak{J}\phi = \mathfrak{J}\Omega\phi = \mathfrak{J}(\sqrt{-1}(2p-n)\phi) = \sqrt{-1}(2(n-p)-n)\mathfrak{J}\phi$$

となる．つまり$\mathfrak{J}\phi \in \overline{\mathbf{S}^{n-p}}$である．そして$\mathfrak{J}$は複素歪線形同型写像なので$\overline{\mathbf{S}^p} = \mathbf{S}^{n-p}$が成立する．

ケーラー形式は重要であるので，もう少し詳しくみてみる．$\{e_i\}_i$を正規直交フレームで$e_{2i} = Je_{2i-1}$とする．これらから$T^{1,0}(M) = \Lambda^{0,1}(M), T^{0,1}(M) = \Lambda^{1,0}(M)$のユニタリフレーム

$$\epsilon_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{2i-1} - \sqrt{-1}Je_{2i-1}), \quad \bar{\epsilon}_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{2i-1} + \sqrt{-1}Je_{2i-1})$$

が定まる．スピノールを$\oplus\Lambda^{0,p}(M)$とみなす場合には，

$$e_{2i-1} \cdot \phi = (\epsilon_i \wedge +i(\epsilon_i))\phi, \quad e_{2i} \cdot \phi = \sqrt{-1}(\epsilon_i \wedge -i(\epsilon_i))\phi$$

として作用する（直線束のところには作用しない）．ケーラー形式は

$$\begin{aligned}\Omega &= \sqrt{-1}\sum \bar{\epsilon}_i \wedge \epsilon_i \\ &= \sqrt{-1}\sum \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{2i-1} + \sqrt{-1}Je_{2i-1}) \wedge \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{2i-1} - \sqrt{-1}Je_{2i-1}) \\ &= \sum_i e_{2i-1} \wedge e_{2i}\end{aligned}$$

として定まる．これをスピノールに作用させるには

$$\Omega \cdot \phi = \sum_i e_{2i-1}e_{2i}\phi$$

とすればよく，$\Lambda^{0,p}(M)$上で$\sqrt{-1}(2p-n)$となることがわかる．

次にスピンc構造$\mathbf{Spin}^c(M) = \mathbf{Spin}^c_o(M) \otimes L$を考える．このときのスピノール束は$\mathbf{S} = \oplus\Lambda^{0,p}(M) \otimes L$である．上と同様にして$\mathbf{S}^p := \Lambda^{0,p}(M) \otimes L$上で$\Omega$は$\sqrt{-1}(2p-n)$で作用する．また$K^{-1} \otimes L^2 = P_1$であった．この$c_1$をとれば，

$$-c_1(K) + 2c_1(L) = c_1(M) + 2c_1(L) = c_1(P_1)$$

が成立する．そこで，

$$\begin{aligned}c_1(\mathbf{S}^0) &= c_1(L) = \frac{1}{2}(c_1(P_1) - c_1(M)), \\ c_1(\mathbf{S}^n) &= -c_1(K) + c_1(L) = c_1(M) + c_1(L) = \frac{1}{2}(c_1(P_1) + c_1(M))\end{aligned}$$

となる．

次に，スピノールから微分形式を作ってみよう．

Example 3.3. 概エルミート多様体の標準的スピンc構造を考えた場合には，そのスピノール束の中に自明束$\Lambda^{0,0}(M)$が存在する．よってすべての点で零でない大

域的切断であるスピノール場が存在する．つまり定数関数 $s_o(x)=1$ である．そこでこの定数関数 1 をスピノールとみなして，

$$w(X,Y):=(\sqrt{-1})^{2(2+1)/2}((X\wedge Y)\cdot 1,1)=-\sqrt{-1}((X\wedge Y)\cdot 1,1)$$

という微分形式を考えることができる．これは**ケーラー形式に一致**する．

Proof. 直接確かめればよい．

$$\begin{aligned}
w(e_{2i-1},e_{2i})&=-\sqrt{-1}(e_{2i-1}e_{2i}1,1)=((\epsilon_i\wedge+i(\epsilon_i))(\epsilon_i\wedge-i(\epsilon_i))1,1)=1\\
w(e_{2i-1},e_{2i-1})&=w(e_{2i},e_{2i})=0\\
w(e_{2i-1},e_{2j-1})&=-\sqrt{-1}((\epsilon_i\wedge+i(\epsilon_i))(\epsilon_j\wedge+i(\epsilon_j))1,1)=0
\end{aligned}$$

などから $w=\sum e_{2i-1}\wedge e_{2i}=\Omega$ となることがわかる． ■

さらに

$$\omega(X_1,\cdots,X_{2n})=\frac{(-\sqrt{-1})^n}{n!}((X_1\wedge\cdots\wedge X_{2n})\cdot 1,1)$$

は体積要素であり $\frac{\Omega^n}{n!}$ に一致する．

Example 3.4. ホロノミー群が $SU(n)$ に含まれる場合を考える．$\mathbf{S}=\oplus\Lambda^{0,p}(M)$ であるが，この場合には二つの自明束 $\Lambda^{0,0}(M)$ と $\Lambda^{0,n}(M)$ が存在する．そこで切断として $s_1(x)=[p,1]$, $s_n(x)=[p,\epsilon_1\wedge\cdots\wedge\epsilon_n]$（$s_n(x)$ は実ではない）をとることができる．このとき，

$$w(X_1,\cdots,X_n)=\frac{1}{\sqrt{2}^n}((X_1\wedge\cdots\wedge X_n)\epsilon_1\wedge\cdots\wedge\epsilon_n,1)$$

とすれば，これは $\Lambda^{0,n}(M)$ の切断 $s_n(x)$ に一致する．

Proof. まず $\epsilon_i,\bar{\epsilon}_i$ のスピノールへの作用は，スピノールを $\oplus\Lambda^{0,p}(M)$ とみなした場合に，それぞれ $\sqrt{2}\epsilon_i\wedge$, $\sqrt{2}i(\epsilon_i)$ として作用する．そこで

$$\begin{aligned}
(\bar{\epsilon}_1\wedge\cdots\wedge\bar{\epsilon}_n)\phi&=\bar{\epsilon}_1\cdot((\bar{\epsilon}_2\wedge\cdots\wedge\bar{\epsilon}_n)\cdot\phi)+(i(\bar{\epsilon}_1)(\bar{\epsilon}_2\wedge\cdots\wedge\bar{\epsilon}_n))\cdot\phi\\
&=\cdots=\bar{\epsilon}_1\cdots\bar{\epsilon}_n\cdot\phi=\sqrt{2}^n i(\epsilon_1)\cdots i(\epsilon_n)\phi
\end{aligned}$$

となるので，

$$w(\bar{\epsilon}_1,\cdots,\bar{\epsilon}_n)=(1,1)=1$$

を得る．同様にして $w(\epsilon_{i_1},\cdots,\epsilon_{i_p},\bar{\epsilon}_{j_1},\cdots,\bar{\epsilon}_{j_{n-p}})=0$ がわかる．よって w は $s_n(x)$ に一致する． ■

さらに，レビチビタ接続から導かれるスピノール束上の接続に関して，s_1, s_n は明らかに平行になる．つまり**ホロノミー群が $SU(n)$ に含まれる場合には，平行スピノールで独立なものが最低二つは存在**する．

3.2.4 コンパクトケーラー多様体

コンパクトケーラー多様体のスピン構造については，より面白いことがわかる．ケーラー多様体は複素多様体なので，次の完全系列を考えられる．

$$0 \to \mathbb{Z}_2 \to \mathcal{O}^* \xrightarrow{z \mapsto z^2} \mathcal{O}^* \to 1$$

ここで $\mathcal{O}^*$ **は零でない正則関数の層**．まず**コンパクト複素多様体**の正則関数は定数関数しかないので，

$$H^0(M, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{z \to z^2} H^0(M, \mathcal{O}) = \oplus_{\text{conn comp}} \mathbf{C}^*$$

は全単射である．よって，

$$0 \to H^1(M, \mathbb{Z}_2) \to H^1(M, \mathcal{O}^*) \to H^1(M, \mathcal{O}^*) \to H^2(M, \mathbb{Z}_2) \to$$

となる．ここで $H^1(M, \mathcal{O}^*)$ と $H^2(M, \mathbb{Z}_2)$ は同型ではないことに注意．$H^2(M, \mathbb{Z})$ は複素直線束を分類したが，$H^1(M, \mathcal{O}^*)$ は正則直線束を分類するものである．さて，標準直線束 $K = \Lambda^{n,0}(M)$ は正則直線束であり，その正則二乗根 $\sqrt{K}$ の存在がスピン構造に対応する．さらに（正則構造も含めた）とり方によってスピン構造の違いがわかる．つまり $\sqrt{K}$ が滑らかなベクトル束として同値であったとしても複素構造の入れ方が異なるなら，スピン構造は異なることになる．

Remark 3.3. このとき $\sqrt{K}$ **の複素構造は二乗したときに** K **の複素構造を与えるもの**でなければならないことに注意．また $\sqrt{K}$ **は滑らかな直線束としても一つとは限らない**．

Proposition 3.3. **コンパクトケーラー多様体のスピン構造は正則直線束** K **の正則二乗根のとり方と一対一対応する**.（コンパクトエルミート多様体でもよい）.

3.3 コンパクトリーマン面上のスピン構造，スピンc構造

具体例として，コンパクトリーマン面上のスピン構造，スピンc構造について考えよう．

3.3.1 $Spin(2)$, $Spin^c(2)$

今までの話は $n \geq 3$ と仮定することが多かった．なぜなら $n = 2$ の場合には $Spin(2) = U(1)$ となり，スピン群は単連結でないからである．そこで $n = 2$ の場合のスピン群，スピンc群の復習からはじめる．

まず，$Spin(2) = U(1)$ であり，$\mathrm{Ad} : Spin(2) \to SO(2)$ は $U(1) \ni z \mapsto z^2 \in U(1)$ という二重被覆を与えるものである．もちろん

$$\begin{array}{ccc} & & Spin(2)=U(1) \\ & F\nearrow & \downarrow \mathrm{Ad} \\ U(1) & \xrightarrow{i} & SO(2)=U(1) \end{array}$$

を満たすリフトは存在しない．その意味では，リーマン面上には標準的なスピン構造は存在しない（スピン構造が存在しないと言っているわけではない）．次にスピンc群について考える．$Spin^c(2)=Spin(2)\otimes U(1)\simeq (U(1)\otimes U(1))/\mathbb{Z}_2$ である．このとき

$$\begin{array}{ccc} & & Spin^c(2)=(U(1)\times U(1))/\mathbb{Z}_2 \\ & F\nearrow & \downarrow \mathrm{Ad}\times l \\ U(1) & \xrightarrow{i\times i} & SO(2)\times U(1) \end{array}$$

を満たすリフト F は存在するのであろうか？ここで $\mathrm{Ad}\times l : Spin^c(2)\ni [a,b]\mapsto (a^2,b^2)\in U(1)\times U(1)$ である．

実は，この場合にはリフトが存在して $F(e^{i\theta})=[e^{i\theta/2},e^{i\theta/2}]$ とすればよい．

Proof. 問題となるのは $e^{i\theta}$ （$0\leq\theta<2\pi$) に対して $e^0=e^{2\pi i}=1$ となるが $e^{i\theta/2}$ に対しては $e^0=1\neq -1=e^{\pi i}$ となってしまい $e^{i\theta}\mapsto e^{i\theta/2}$ が $U(1)$ から $U(1)$ への well-defined な写像を定義しないことである．これがスピン群へのリフトが存在しないことの理由である．しかし，今の場合には，$F(e^0)=[1,1]=[-1,-1]=F(e^{2\pi i})$ となって well-defined になる．また $(\mathrm{Ad}\times l)\circ F(a)=\mathrm{Ad}\times l([\sqrt{a},\sqrt{a}])=(a,a)$ となるので図式が可換になる． ■

スピノール表現を考えよう．スピン幾何入門１で述べた $\mathbb{C}l_2$ および $Spin(2)$ の実現から $a\in Spin(2)=U(1)$ に対して，$W_2^{\mp}$ 上で $a^{\pm 1}$ で作用する（$W^{\mp}$ と符号が逆になってるのは，複素体積要素で固有分解しているからである）．そこで $Spin^c(2)$ の作用は，

$$Spin^c(2)\ni [a,b]\to ba^{\pm 1}\in U(W_2^{\mp})\simeq U(1)$$

であるので，$F:U(1)\to Spin^c(2)$ と合成すれば，$W_2^-\simeq\mathbb{C}$ 上では自然表現であり，W_2^+ 上では自明表現である．つまり

$$W_2=\Lambda^{0,0}\oplus\Lambda^{0,1}=W_2^+\oplus W_2^-$$

となる．

3.3.2 コンパクトリーマン面上の正則直線束

次にコンパクトリーマン面上に対する幾何学について述べる．リーマン面にリーマン計量を入れた場合に，９０度回転が定まる．それをリーマン面の概複素構造とみなすと，必ず可積分である．また計量を共形変形しても９０度回転は変わらないので，計量の共形類と複素構造は一対一対応する．さらに，**リーマン面はケーラー多様体**になる．

Proof. $X, X' \in \Gamma(T^{1,0}(M))$ なら $[X, X'] \in \Gamma(T^{1,0}(M))$ であることが複素構造が可積分になることであった．dual を考えれば $d\Lambda^{1,0}(M) \subset \Lambda^{2,0}(M) \oplus \Lambda^{1,1}(M)$ となることである．しかしリーマン面上にはもともと $\Lambda^{0,2}(M), \Lambda^{2,0}(M)$ が存在しないので，$d\Lambda^{1,0}(M) \subset \Lambda^{2,0}(M) \oplus \Lambda^{1,1}(M)$ が満たされる．よって可積分である． ■

以下では，genus が g のコンパクトリーマン面を考える．計量を一つ固定して，複素構造も固定する．このリーマン面のホモロジーは次のよう．

$$H_0(M, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, \quad H_1(M, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{2g}, \quad H_2(M, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$$

である（これは適当な位相幾何の本をみればわかる）．さらに普遍係数定理から

$$H^0(M, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, \quad H^1(M, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{2g}, \quad H^2(M, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$$
$$H^0(M, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2, \quad H^1(M, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2^{2g}, \quad H^2(M, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2$$

となる．

さてコンパクトリーマン面上の正則直線束について議論する．まず正則直線束の同型類全体は $H^1(M, \mathcal{O}^*)$（群）となる．また滑らかな直線束の同型類全体は $H^1(M, \underline{\mathbb{C}^*}) \simeq H^1(M, \underline{U(1)}) \simeq H^2(M, \mathbb{Z})$（群）である．これらの関係を見るには次の完全系列を使う

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{j} \mathcal{O} \xrightarrow{\exp 2\pi i} \mathcal{O}^* \to 1$$

これより完全系列

$$\begin{aligned}
&(H^0(M, \mathcal{O}) = \mathbb{C}) \to (H^0(M, \mathcal{O}^*) = \mathbb{C}^*) \\
&\qquad \to (H^1(M, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{2g}) \xrightarrow{j} H^1(M, \mathcal{O}) \to H^1(M, \mathcal{O}^*) \to (H^2(M, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}) \to H^2(M, \mathcal{O})
\end{aligned}$$

を得る．最初のところは全射なので j は単射. さらに $H^2(M, \mathcal{O}) = H^{0,2}$ となる（ドルボー定理と Hodge-de-Rham-Kodaira 定理から）．ここで $H^{0,2}$ は調和 $(0,2)$ 形式であるがリーマン面ではこのよなものは存在しないので $H^{0,2} = 0$．よって

$$0 \to (H^1(M, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{2g}) \xrightarrow{j} H^1(M, \mathcal{O}) \to H^1(M, \mathcal{O}^*) \to (H^2(M, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}) \to 0$$

よって

$$0 \to H^1(M, \mathcal{O})/H^1(M, \mathbb{Z}) \to H^1(M, \mathcal{O}^*) \to H^2(M, \mathbb{Z}) \to 0$$

を得る．この完全系列の意味することは $c_1(L) = 0$ **となる直線束（つまり滑らかな直線束として自明）に対して，そこに入る正則構造が** $H^1(M, \mathcal{O})/H^1(M, \mathbb{Z})$ **で分類される**ということである．$H^1(M, \mathcal{O}^*)$ を Picard 多様体といい $Pic(M)$ と書き，$H^1(M, \mathcal{O})/H^1(M, \mathbb{Z})$ を **Jacobi 多様体**といい $Pic^0(M)$ と書く．このように，リーマン面上の正則直線束はそのチャーン類（$\mathbb{Z}$ に値をもつが，それを直線束の次数とよぶ）及び，$Pic^0(M)$ で分類されることになる．さらに $H^1(M, \mathcal{O}) \simeq H^{0,1}$ となる．そして $H^{0,1} \ni \phi \to \phi + \bar{\phi} \in H^1 \simeq H^1(M, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{2g}$ は同型になる．さらに，

$H^1(M,\mathbb{Z})$ は $H^1(M,\mathbb{R})$ の中で格子になり，$Pic^0(M)$ がトーラス $U(1)^{2g}$ になることがわかる（さらに自然に複素構造も入る．アーベル多様体）．そこで次の群完全系列を得る．

$$0 \to U(1)^{2g} \to H^1(M,\mathcal{O}^*) \to H^2(M,\mathbb{Z}) \to 0$$

これらに関してさらに深い結果がたくさんある．例えば，小林昭七「複素幾何２」を見よ．

3.3.3 スピン構造，スピン c 構造

さて，スピン c 構造について考えよう．上で見たようにリーマン面上には自然なスピン c 構造が存在する．それを $\mathbf{Spin}^c_o(M)$ と書くことにする．このときのスピノール束は

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^+ \oplus \mathbf{S}^- = \Lambda^{0,0}(M) \oplus \Lambda^{0,1}(M)$$

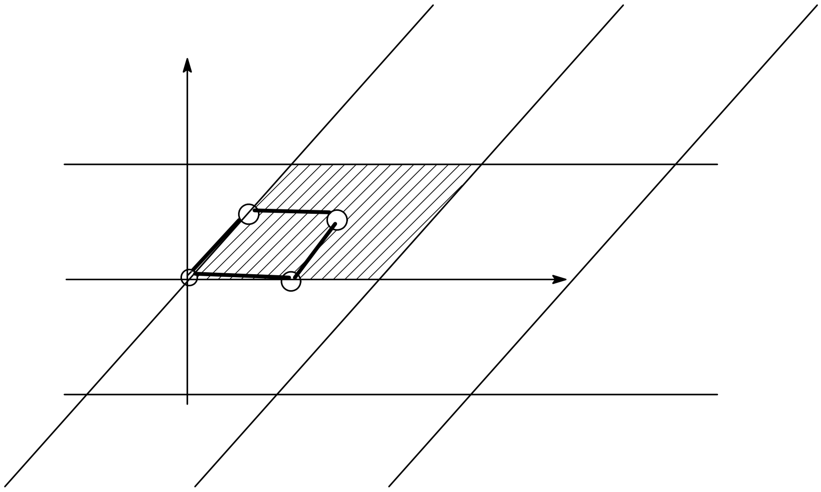
である．他のスピン c 構造は $L \in H^2(M,\mathbb{Z})$ をテンソルすればよい．L に正則構造を入れることができるが正則構造が異なってもスピン c 構造は同値である．

次に，スピン構造を考える．$w_2(M) \equiv c_1(M) = -c_1(K) = -e(TM)$ であるが，Gauss-Bonnet から $\chi(M) = \int_M e(TM) = 2-2g$ であるので $w_2(M) = 0$ となる．つまり**コンパクトリーマン面上には必ずスピン構造が存在**する．そのスピン構造は $H^1(M,\mathbb{Z}_2)$ で分類されるが $H^1(M,\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2^{2g}$ であるので，**異なるスピン構造は** 2^{2g} **個**ある．

これを Jacobi 多様体を使えば次のようになる．

$$0 \to U(1)^{2g} \to H^1(M,\mathcal{O}^*) \to H^2(M,\mathbb{Z}) \to 0$$

を考える．いま考えるべきはケーラー多様体なので正則直線束 $K = \Lambda^{1,0}$ の正則二乗根である．$c_1(K) = 2-2g$ であり，$H^1(M,\mathcal{O}^*) \to H^2(M,\mathbb{Z})$ は全射なので $1-g \in \mathbb{Z} = H^2(M,\mathbb{Z})$ に対応する正則直線束 $\sqrt{K}$ は必ず存在する（さらにこれらは滑らかな直線束としてはすべて同型）．問題は，このようなものがどのくらい存在するかである．この $\sqrt{K}$ と滑らかな直線束としては同型であるが正則構造が違うものは $U(1)^{2g}$ で分類される．だからといってスピン構造が $U(1)^{2g}$ でパラメタライズされるわけではない．そのような直線束をとってきて二乗した場合に，K と滑らかな直線束としては同型であるが，正則直線束としては異なる場合があるからである．正則構造はリーマン計量の共形類から定まるのであったので，そのような直線束は異なる計量の共形類から導かれる正則構造なのである．我々はリーマン計量を固定してスピン構造を考えているので，これでは意味がない．そこで考えるべきは，**二乗したら K と同じ正則構造を持つような正則直線束 $\sqrt{K}$** である．トーラス $U(1)^{2g}$ の $\mathbb{R}^{2g}$ 内の基本領域で表したとき，各辺の長さが基本領域の半分である領域の頂点を考えればよい．つまりスピン構造は 2^{2g} 個あるのである．



この図（$g=1$ の図）の白丸のところが，スピン構造に対応する．

さて，スピン構造が決まったときのスピノール束であるが $\mathbf{S}=\Lambda^{0,0}(M)\otimes\sqrt{K}\oplus\Lambda^{0,1}(M)\otimes\sqrt{K}$ である．そしてそれぞれのチャーン数は $c_1(\Lambda^{0,0}\otimes\sqrt{K})=1-g$, $c_1(\Lambda^{0,1}(M)\otimes\sqrt{K})=-(2-2g)+1-g=-(1-g)$ となる．これは $\mathbf{S}^0=\Lambda^{0,0}(M)\otimes\sqrt{K}, \mathbf{S}^1=\Lambda^{0,1}(M)\otimes\sqrt{K}$ としたときに $(\mathbf{S}^0)^*\simeq\overline{\mathbf{S}^0}\simeq\mathbf{S}^1$ となることを言っている．

3.4 四元数ケーラー多様体

四元数ケーラー多様体のスピン構造について考えよう．実 $4n$ 次元四元数ケーラー多様体 M を考える．つまりリーマンホロノミー群が $Sp(n)Sp(1)$ に埋め込まれるものである．スピン幾何入門２でみたように n が偶数なら $Sp(n)Sp(1)$ から $Spin(4n)$ への自然なリフトが存在するので，スピン多様体になる．特に，n が偶数なら $w_2(M)=0$ であることもわかる．

Proposition 3.4. 実 $8k$ 次元四元数ケーラー多様体 M はスピン多様体，つまり $w_2(M)=0$ である． そして四元数ケーラー構造から自然なスピン構造が定まる．

次に n が奇数のときのスピン構造の存在について考えたい．四元数ケーラー多様体のホロノミー群は $Sp(n)Sp(1)$ であり，その表現に対して同伴ベクトル束を得ることができる．$Sp(n)$ の既約表現 V_ρ と $Sp(1)$ の既約表現 V_k をとる．ここで ρ, k は highest weight である．$V_\rho\otimes V_k$ は $k+\sum\rho^i$ が偶数なら $Sp(n)Sp(1)$ の既約表現になるり，作用と可換な実構造がはいるのであった．よく使うのは次のような表現に対応した同伴ベクトル束である．

1. E,H を自然表現とすれば，$E\otimes H$ は複素 $4n$ 次元ベクトル空間であり，$Sp(n)Sp(1)$ の既約表現空間である．そこで $\mathbf{E}\otimes\mathbf{H}$ を対応する同伴ベクトル束とすれば，$T(M)\otimes\mathbb{C}$ となる．また，ここには実構造が入るので，その実部 $(\mathbf{E}\otimes\mathbf{H})^{\Re}$ が $T(M)$ であり，$\mathbf{E}\otimes\mathbf{H}$ に入る計量はリーマン計量と一致する．

2. $S^2(H)$ に対応する同伴束を $S^2(\mathbf{H})$, $S^2(E)$ に対応する同伴ベクトル束を $S^2(\mathbf{E})$ とする．これらにも実構造が入るので，これら同伴ベクトル束の実部が取れる．

3. H は $Sp(n)Sp(1)$ の表現とはならないので，対応する同伴ベクトル束 $\mathbf{H}$ は一般に大域的には定義できない．しかし局所的には $Sp(n)Sp(1)$ を $Sp(n)\times Sp(1)$ にリフトすることは可能であるので $\mathbf{H}$ **は局所的には定義できる**．同様に $\mathbf{E}$ **も局所的には定義できる**．$\mathbf{H}, \mathbf{E}$ は大域的に定義できなくても $\mathbf{E}\otimes\mathbf{H}$ は大域的に定義できることに注意．そのほか $S^k(\mathbf{H})$ や $\Lambda_0^l(\mathbf{E})$ なども使う（これらも k, l によっては局所的にしか定義できない）．

3.4.1 スピン構造とホロノミー群のリフト

n が**奇数**の場合には**主** $Sp(n)Sp(1)$ **束の構造群が** $Sp(n)\times Sp(1)$ **へリフトできることとスピン構造が存在することが同値**であることを証明したい．

M 上の主 $Sp(n)Sp(1)$ 束を分類するコホモロジー群は $Sp(n)Sp(1)$ 値 sheaf の一次コホモロジー群 $H^1(M, \underline{Sp(n)Sp(1)})$ である．(可換群ではないので高次コホモロジー群は一般に定義できない）．群完全系列

$$1 \to \mathbb{Z}_2 \to \underline{Sp(n)\times Sp(1)} \to \underline{Sp(n)Sp(1)} \to 1$$

から，次の準同形をえる．

$$\delta : H^1(M, \underline{Sp(n)Sp(1)}) \to H^2(M, \mathbb{Z}_2)$$

これはスピン構造のときと同様に主 $Sp(n)Sp(1)$ 束が主 $Sp(n)\times Sp(1)$ 束にリフトするための障害を表している．M **のフレーム束** P**（主** $Sp(n)Sp(1)$ **束）に対して** $\epsilon := \delta(\mathbf{P})$ **とすれば，**$\epsilon = 0$ **なら** P **は主** $Sp(n)\times Sp(1)$ **束にもち上がり**，$\mathbf{H}$ および $\mathbf{E}$ も大域的に存在することになる．

さて，$Sp(n)Sp(1)$ の $(S^2(H))^{\Re}$ への表現を考えると，

$$0 \to \mathbb{Z}_2 \to \underline{Sp(1)} \to \underline{SO(3)} \to 1$$

という完全系列を得る．実3次元ベクトル束 $(S^2(\mathbf{H}))^{\Re}$ に対する主 $SO(3)$ 束 $\mathbf{P}'$ を考えたとき，$\mathbf{P}'$ が $Sp(1)$ 束に lift するための必要十分条件は2次 Stiefel-Whitney 類 $w_2((S^2(\mathbf{H}))^{\Re}) = 0$ である．実は，**この障害類** $w_2((S^2(\mathbf{H}))^{\Re})$ **と** ϵ **は同じもの**である．

Proof. スピン構造と同様にチェックコホモロジーで考える．主 $Sp(n)Sp(1)$ 束の変換関数をリフトしたものを $(g_{ij}, h_{ij}) \in Sp(n)\times Sp(1)$ とする．このとき，$g_{ij}g_{jk}g_{ki} = h_{ij}h_{jk}h_{ki} = z_{ijk}$ となる．この $[z]$ が ϵ である．一方で $(S^2(\mathbf{H}))^{\Re}$ の変換関数は $\mathrm{Ad} : Sp(1) \to SO(3)$ を使って $\mathrm{Ad}(h_{ij})$ とかける．よって $\mathrm{Ad}(h_{ij})$ のリフトとして h_{ij} そのものをとってくれば，$h_{ij}h_{jk}h_{ki} = z_{ijk}$ により同じ $[z]$ が定まる． ■

以下の議論はSalamonの論文[4]からの引用である．

さて，$Z := P(\mathbf{H})$ **を H のファイバーを射影化したファイバー束**とする．$\mathbf{H}$ は大域的に定義できないが，Z は大域的に定義できる．ファイバーは $P^1(\mathbb{C}) = S^2$ である．また $q : Z \to M$ を射影とする．

Remark 3.4. この Z は四元数ケーラー幾何で重要な**ツイスター空間**とよばれるものである．この Z は $(S^2(\mathbf{H}))^{\mathfrak{R}}$ の球面束としても定義できる．

少しの間 $\epsilon = 0$ と仮定し，$\mathbf{H}$ も大域的に定義されているとする．このとき，Z の点 $z = [h] \in P(\mathbf{H})$ 上の fiber が $\mathbb{C}h \subset (q^*\mathbf{H})_z$ となる Z 上の複素直線束 L^{-1} が存在する（tautologous bundle）．この dual bundle L は $q^{-1}(x) \simeq P^1(\mathbb{C})$ へ制限すると，$P^1(\mathbb{C})$ 上のチャーン類が１の hyperplane bundle となる．$L^{-1} \to q^*(\mathbf{H})$ を埋め込みとすると，

$$0 \to L^{-1} \to q^*(\mathbf{H}) \to L^{-1} \otimes T_F \to 0$$

というベクトル束の完全系列を得る．ここで T_F は $z \in q^{-1}(x) \simeq P^1(\mathbb{C})$ のファイバーが接空間 $T(q^{-1}(x))$ である Z 上の複素一次元ベクトル束である．

Proof. $q^*(\mathbf{H})$ は $q^{-1}(x) \simeq P^1(\mathbb{C})$ 上で，$q^*(\mathbf{H})|_{q^{-1}(x)} = q^{-1}(x) \times H$ という自明束である．さらに，$L^{-1}|_{q^{-1}(x)}$ は $q^{-1}(x)$ 上の tautologous line bundle になるので，$T(P^1(\mathbb{C})) \oplus \mathbb{C} \simeq L|_{q^{-1}(x)} \oplus L|_{q^{-1}(x)}$ が成立する（この分解は,subsection 3.5で証明する）．よって $T(P^1(\mathbb{C})) \otimes L^{-1}|_{q^{-1}(x)} \oplus L^{-1}|_{q^{-1}(x)} = \mathbb{C}^2 = H$．これが $q^{-1}(x) \subset Z$ 上の $q^*(\mathbf{H})$ の分解である．このことから上の完全系列を得る． ■

この完全系列の top exterior power をとれば $\Lambda^2(q^*(\mathbf{H})) = L^{-2} \otimes T_F$ を得る．

さて，$\epsilon \neq 0$ の場合を考える．$\Lambda^2(\mathbf{H})$ は M 上大域的に定義され，自明表現に対応するので自明束になる．$\Lambda^2(q^*(\mathbf{H}))$ も Z 上の自明束である．また T_F も大域的に Z 上で定義されることはすぐにわかる．よって

$$T_F \simeq L^2$$

が成立する．そして L^2 も大域的に定義される．局所的には

$$q^*\mathbf{H} = L \oplus L^{-1} \simeq L \oplus \bar{L}$$

となるので，

$$q^*S^2(\mathbf{H}) = L^2 \oplus \overline{L}^2 \oplus \mathbb{C}$$

が成立する．また $\mathbf{E}$ 上のエルミート計量と複素シンプレクティック構造を使えば $\mathbf{E} \simeq \mathbf{E}^* \simeq \bar{\mathbf{E}}$ となる（局所的に）．よって

$$q^*(T^*M \otimes \mathbb{C}) = q^*(\mathbf{E}) \otimes q^*(\mathbf{H}) = Lq^*(\mathbf{E}) \oplus \overline{Lq^*(\mathbf{E})}$$

を得る．ここで $Lq^*\mathbf{E}$ は Z 上で global に定義されることに注意.

$l = \frac{1}{2}c_1(L^2) \in H^2(Z, \mathbb{R})$ とする．$q^*(S^2(\mathbf{H})) = L^2 \oplus \overline{L}^2 \oplus \mathbb{C}$ であったが，実構造に関して，実部虚部に分解すると $(L^2 \oplus \mathbb{R}) \oplus (\overline{L}^2 \oplus \overline{\mathbb{R}})$ となる．よって

$$q^*\epsilon = w_2(q^*(S^2(\mathbf{H}))^{\Re}) = w_2((L^2_{\mathbb{R}} \oplus \mathbb{R})) = w_2(L^2_{\mathbb{R}}) \equiv c_1(L^2) \mod 2$$

を得る．つまり $q^*\epsilon \equiv 2l \mod 2$ がわかる（ここで $l = \frac{1}{2}c_1(L^2)$ としていたので $2l$ は even とは限らない．また $L^2_{\mathbb{R}}$ は複素ベクトル束 L^2 を実ベクトル束とみなしたもの）.

次に $Lq^*(\mathbf{E})$ のチャーン指標を計算すれば,

$$ch(Lq^*(\mathbf{E})) = e^l q^*(ch(\mathbf{E}))$$

となり，$c_1(\mathbf{E}) = c_1(\mathbf{E}^*) = -c_1(\mathbf{E}) = 0$ を使えば

$$c_1(Lq^*(\mathbf{E})) = l \dim E = 2nl$$

を得る．先ほどと同様にして

$$q^*(w_2(M)) = w_2(q^*(T^*M)) \equiv c_1(Lq^*(\mathbf{E})) \mod 2 = n(2l) \mod 2$$

となるので $q^*(w_2(M)) \equiv n(2l) \mod 2$ を得る．

また Leray spectral sequence によるある定理 (Bott-Tu p179）を使えば

$$q^* : H^2(M, \mathbb{Z}_2) \to H^2(Z, \mathbb{Z}_2)$$

は単射であることがわかる．以上から $w_2(M) = n\epsilon$ となる．

以上から次が証明された.

Proposition 3.5. M を実 $4n$ 次元の四元数ケーラー多様体とする．

$$w_2(M) = \begin{cases} \epsilon & n = odd \\ 0 & n = even \end{cases}$$

となる．特に，n が偶数ならスピン多様体であることがわかる（すでに証明した）. また n **が奇数のとき「M がスピン多様体」** $\iff$ **「構造群が** $Sp(n) \times Sp(1)$ **へリフトする」**ことがわかる．また偶数の場合にはスピンだからといって必ずしも $Sp(n) \times Sp(1)$ へリフトするわけではない.

3.4.2 スピノール束

四元数ケーラー多様体のスピノール束について考える．まず n が偶数の場合には自然なスピン構造があった．このスピン構造に関するスピノール束は

$$\mathbf{S} = \oplus_p \Lambda^p_0(\mathbf{E}) \otimes S^{n-p}(\mathbf{H}), \quad \mathbf{S}^+ = \oplus_p \Lambda^{2p}_0(\mathbf{E}) \otimes S^{n-2p}(\mathbf{H}), \quad \mathbf{S}^- = \oplus_p \Lambda^{2p+1}_0(\mathbf{E}) \otimes S^{n-2p-1}(\mathbf{H})$$

である．ここで $\Lambda_0^p(\mathbf{E})\otimes S^{n-p}(\mathbf{H})$ は大域的に定義できる主 $Sp(n)Sp(1)$ 束の同伴ベクトル束である．特に，これらのベクトル束には実構造が入ることに注意する．また $\mathbf{S}^{\pm}$ の分解は粒子の数の偶奇性によるものであったので，スピン幾何入門２を参照にすればすぐにわかる．

次に n が奇数の場合にはスピン構造を一つ固定すれば主 $Sp(n)\times Sp(1)$ 束が定まる．そして，スピノール束はこの同伴束として記述できる．つまり

$$\mathbf{S}=\oplus_p\Lambda_0^p(\mathbf{E})\otimes S^{n-p}(\mathbf{H}),\quad \mathbf{S}^+=\oplus_p\Lambda_0^{2p}(\mathbf{E})\otimes S^{n-2p}(\mathbf{H}),\quad \mathbf{S}^-=\oplus_p\Lambda_0^{2p+1}(\mathbf{E})\otimes S^{n-2p-1}(\mathbf{H})$$

である．ここで $\Lambda_0^p(\mathbf{E})\otimes S^{n-p}(\mathbf{H})$ は大域的に定義できるもので主 $Sp(n)\times Sp(1)$ 束の同伴ベクトル束である（主 $Sp(n)Sp(1)$ 束の同伴ベクトル束にはならない）．また，これらのベクトル束には四元数構造が入る．

Kraines 形式を使えばスピノール束の既約分解をすることが可能である．実際，スピン幾何入門２で見たように $\Lambda_0^{n-p}(\mathbf{E})\otimes S^p(\mathbf{H})$ 上に定数 $2p(p+2)-3n$ で作用する．

3.5 スピン多様体，スピンｃ多様体の例

ここではスピン構造やスピンｃ構造がはいる多様体をいくつか紹介する．スピン構造やスピンｃ構造の存在は，位相幾何学の豊富な知識を必要とするので，証明を省略しているところもある．

3.5.1 １次元多様体のスピン構造

一次元多様体は $\mathbb{R}$ か S^1 である．まず $\mathbb{R}$ を考える．$H^1(\mathbb{R},\mathbb{Z}_2)=0$ であるのでスピン構造は一つ．$SO(1)=\{1\}$ であるので，主 $SO(1)$ 束は $\mathbb{R}$ そのものである．$Spin(1)=\{\pm1\}$ であるので，スピン構造は $\mathbb{R}$ の非連結二重被覆である．

S^1 の場合には $H^1(S^1,\mathbb{Z}_2)=\mathbb{Z}_2$ であるので，スピン構造は二つ．S^1 の非連結二重被覆が，連結二重被覆である．

Remark 3.5. 非連結二重被覆がスピン同境群として非自明なものになる．S^1 を円盤の境界と見たとき円盤のスピン構造を S^1 に制限すれば連結二重被覆となるスピン構造を得るので，連結二重被覆の方がスピン同境群として自明になる．

3.5.2 ４次元の場合のスピンｃ構造

コンパクト４次元向き付け可能多様体にはスピンｃ構造が存在することをみていく．以下の議論は [1] を参照にしている．

まず普遍係数定理から

$$H^3(M,\mathbb{Z})=\{H_3(M,\mathbb{Z})/TorH_3(M,\mathbb{Z})\}\oplus TorH_2(M,\mathbb{Z})$$

が成立する．ここで $TorH_i$ は H_i のねじれ元全体を表している．
　またポアンカレ双対により $H_2(M,\mathbb{Z})\simeq H^2(M,\mathbb{Z})$ である．よって

$$TorH^3(M,\mathbb{Z})=TorH_2(M,\mathbb{Z})=TorH^2(M,\mathbb{Z})$$

となる．以下 $T=TorH^2(M,\mathbb{Z})$ とする．さて

$$0\to\mathbb{Z}\xrightarrow{2}\mathbb{Z}\xrightarrow{\exp i\pi(\cdot)}\mathbb{Z}_2\to 0$$

から，完全系列

$$H^2(M,\mathbb{Z})\xrightarrow{2}H^2(M,\mathbb{Z})\xrightarrow{r}H^2(M,\mathbb{Z}_2)\xrightarrow{\beta_*}H^3(M,\mathbb{Z})\xrightarrow{2}H^3(M,\mathbb{Z})\xrightarrow{r}$$

を得る．よって $\mathrm{im}\beta=\ker 2$ より

$$\mathrm{im}\beta_*=\{\alpha\in TorH^3(M,\mathbb{Z})|2\alpha=0\}\simeq\{\gamma\in T|2\gamma=0\}$$

（上の $\simeq$ は $TorH^3(M,\mathbb{Z})=TorH^2(M,\mathbb{Z})$ から）．また $\dim_{\mathbb{Z}_2}(T/2T)=\dim_{\mathbb{Z}_2}\{\gamma\in T|2\gamma=0\}$ が成立する．

Proof. T は捻れ部分なので $\mathbb{Z}_{p_i}$ の直和である．$\gamma\neq 0\in\mathbb{Z}_{2k+1}$ で $2\gamma=0$ となるものは存在しない．一方 $\gamma\neq 0\in\mathbb{Z}_{2k}$ で $2\gamma=0$ となるのは $\mathbb{Z}_{2k}=\{0,1,\cdots,2k-1\}$ と書いた場合に k のみである．一方 $\mathbb{Z}_{2k+1}/2\mathbb{Z}_{2k+1}=0$, $\mathbb{Z}_{2k}/2\mathbb{Z}_{2k}=\mathbb{Z}_2$ であることはすぐにわかる．よって $\dim_{\mathbb{Z}_2}(T/2T)=\dim_{\mathbb{Z}_2}\{\gamma\in T|2\gamma=0\}$ を得る． ■

　そして $r(T)\simeq T/2T$ とあわせれば $\dim_{\mathbb{Z}_2}\mathrm{im}\beta_*=\dim_{\mathbb{Z}_2}r(T)$ を得る．そこで短完全系列

$$\mathrm{im}(r)\xrightarrow{i}H^2(M,\mathbb{Z}_2)\xrightarrow{\beta_*}\mathrm{im}(\beta_*)$$

を考えれば,

$$\dim_{\mathbb{Z}_2}(H^2(M,\mathbb{Z}_2))=\dim_{\mathbb{Z}_2}\mathrm{im}(r)+\dim_{\mathbb{Z}_2}\mathrm{im}\beta_*=\dim_{\mathbb{Z}_2}\mathrm{im}(r)+\dim_{\mathbb{Z}_2}r(T).$$

を得る．
　さて，次の inclusion を考える：

$$r(T)\subset\mathrm{im}r\subset H^2(M,\mathbb{Z}_2).$$

$x\in\mathrm{im}r$ とすると，$\alpha\in H^2(M,\mathbb{Z})$ で $x=r(\alpha)$ となるものが存在．$y\in r(T)$ とすると $\beta\in T\subset H^2(M,\mathbb{Z})$ で $r(\beta)=y$ となるものが存在．この β は torsion element であるので，$\alpha\cup\beta\in H^4(M,\mathbb{Z})=\mathbb{Z}$ は零となる．よって

$$x\cup y=0\quad\text{for } x\in\mathrm{im}r,\ y\in r(T).$$

そこで

$$\Gamma:=\{\gamma\in H^2(M,\mathbb{Z}_2)|\forall y\in r(T),\gamma\cup y=0\}$$

とすると，$\mathrm{im}r \subset \Gamma$ である．一方，$\mathbb{Z}_2$ に対するポアンカレ双対定理を考えると，

$$H^2(M,\mathbb{Z}_2) \times H^2(M,\mathbb{Z}_2) \ni (\alpha,\beta) \mapsto \alpha \cup \beta \in H^4(M,\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$$

は非退化であるので

$$\dim_{\mathbb{Z}_2} \Gamma = \dim_{\mathbb{Z}_2} H^2(M,\mathbb{Z}_2) - \dim_{\mathbb{Z}_2} r(T) = \dim_{\mathbb{Z}_2} \mathrm{im}r$$

となる．よって $\mathrm{im}r = \Gamma$ が成立する．つまり

$$\mathrm{im}r = \{\gamma \in H^2(M,\mathbb{Z}_2) | \forall y \in r(T), \gamma \cup y = 0\}$$

このように $r : H^2(M,\mathbb{Z}) \to H^2(M,\mathbb{Z}_2)$ の像が分かった．

さて，M がスピン c 構造をもつことを証明しよう．そのためには第 2 Stiefel-Whitney 類 w_2 が $\mathrm{im}r$ に属することを言えばよい．（スピン c 構造の存在は $w^2 \equiv c_1(P_1) \mod 2$ となる $U(1)$ 束 P_1 が存在すればよかった)．そこで $w_2 \cup y = 0$（$\forall y \in r(T)$）を確かめればよい．向きつき 4 次元多様体上の Wu の公式より，w_2 は, すべての $x \in H^2(M,\mathbb{Z}_2)$ に対して $x^2 = w_2 \cup x$ をみたす唯一つのコホモロジー類である．そこで $y \in r(T)$ に対して $y^2 = y \cup y = 0$ であったので,

$$w_2 \cup y = y^2 = 0$$

である．これより $w_2 \in \mathrm{im}r$ であることがわかった.（Wu の公式については，Milnor の特性類の本とか，中岡「位相幾何学」（共立）などに載ってる）.

以上から

Proposition 3.6. **すべてのコンパクト向き付け可能 4 次元多様体はスピン c 構造をもつ**.

この命題から 4 次元サイバーグウィッテン理論が展開できる（しかし，結果だけ認めてしまったほうがよいであろう）.

3.5.3 そのほかの例

1. 2-connected な多様体（単連結かつ $\pi_2(M) = 0$）となる多様体はスピン多様体であり，スピン構造は一つである．例えば，球面 S^n（$n \geq 2$）や Stiefel 多様体.（Stiefel 多様体の 2-connected 性は等質空間として表してホモトピー完全系列を使えばよい）.

2. 接束が自明束な多様体．例えば，リー群．リー群は左不変ベクトル場を使えば接束は自明化できる．さらに向きつき 3 次元多様体の接束は自明束であるので，**向きつき 3 次元多様体には必ずスピン構造が存在**する．また，安定平行多様体．つまり接束に自明束を直和すれば自明になるもの．この全スティー

フェルホイットニー類を計算すれば $w_1 = w_2 = 0$ がわかる．例えば，球面 S^n が $\mathbb{R}^{n+1}$ に入っていると考えれば一次元 normal 束（自明束である）と接束 $T(S^n)$ を足せば，自明束になる．向きつき２次元多様体もそのような例である．また $f : \mathbb{R}^{n+q} \to \mathbb{R}^q$ の正則値の逆像である多様体は安定平行である（S^n が例）．これは normal 束が $\mathbb{R}^q$ を引き戻したものであるので自明であり，$\mathbb{R}^{n+q}|_M = T(M) \oplus N(M) = T(M) \oplus \mathbb{R}^q$ となるからである．

Remark 3.6. 向きつき３次元多様体の接束が自明束であることの証明は小島定吉「３次元の幾何学」がよい．この本では**向きつきコンパクト３次元多様体上の任意の $SU(2)$ 束が自明束**になることの証明も書いてある．自明化の仕方のホモトピー類（つまり主束の大域切断のホモトピー類）は $\mathbb{Z}$ ある．また向きつきコンパクト３次元多様体がスピン構造を持つことだけなら，次のように証明できる．スティーフェルホイットニー類に関して Wu の公式というものが知られている（Milnor の特性類の本がよい）．３次元多様体の場合には $w_2 = w_1^2$ である．よって $w_1(M) = 0$ なら自動的に $w_2(M) = 0$ が従う．よってスピン多様体である．

3. 射影空間 $P^n(\mathbb{K})$ を考える．ここで $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ である．この射影空間には tautological line bundle というベクトル束 η を作れる（係数は $\mathbb{K}$ である）．$P^n(\mathbb{R})$ なら実直線束であり，$w_1(\eta) \neq 0$, $w_{i\geq 2}(\eta) = 0$ となる．次に $P^n(\mathbb{C})$ なら複素直線束であり，$w_{2i}(\eta_{\mathbb{R}}) \equiv c_i(\eta) \mod 2$, $w_{2i+1}(\eta_{\mathbb{R}}) = 0$ であるので，$w_2(\eta_{\mathbb{R}}) \neq 0$, $w_i(\eta_{\mathbb{R}}) = 0$ $(i \neq 2)$．さらに $P^n(\mathbb{H})$ なら四元数直線束であり，複素 rank 2 のベクトル束である．四元数構造から $\eta = \eta^*$ であるので $c_1(\eta) = 0$ であり，$c_2(\eta) \neq 0$．$c_{i\geq 2}(\eta) = 0$ である．よって $w_4(\eta_{\mathbb{R}}) \neq 0$，$w_i(\eta_{\mathbb{R}}) = 0$ $(i \neq 4)$ となる．

   さて
$$T(P^n(K)) \oplus \mathbb{K} = \underbrace{\eta^* \oplus \cdots \eta^*}_{n+1}$$
   が成立する．ここで $\mathbb{K}$ は自明束 $M \times \mathbb{K}$ のこと．

   Proof. $l \subset \mathbb{K}^{n+1}$ を $P^n(\mathbb{K})$ の点とする．内積によって $l^{\perp}$ をとっておく．そして $\mathrm{Hom}(l, l^{\perp})$ を考える．$A \in \mathrm{Hom}(l, l^{\perp})$ に対して，A のグラフを対応させる．つまり
$$W_A := \{v + Av \in l \oplus l^{\perp} = \mathbb{K}^{n+1} \mid v \in l\}$$
   これを $P^n(\mathbb{K})$ の点とみなす．このとき
$$\Phi_l : \mathrm{Hom}(l, l^{\perp}) \to P^n(\mathbb{K})$$
   は単射で，$\Phi_l(0) = l$ となる．また像が
$$\{l' \subset \mathbb{K}^{n+1} | \pi_l|_{l'} : l' \to l,\ \text{linear isom}\}$$

となることもわかる（練習問題）．$[l]$ を動かせば，この方法で射影空間の多様体構造が入る．特に $T_l(P^n(\mathbb{K})) \simeq \mathrm{Hom}(l, l^{\perp})$ である．さて $[l]$ に対して直線 l を対応させることにより tautological 直線束 η を作るのであった．同様に $[l]$ に $l^{\perp}$ を対応させることで，あるベクトル束 $\eta^{\perp}$ を得る．よって，

$$T(P^n(\mathbb{K})) \simeq \mathrm{Hom}(\eta, \eta^{\perp})$$

となる．また次が完全系列であることは明らか．

$$0 \to \eta \to \mathbb{K}^{n+1} \to \eta^{\perp} \to 0$$

そこで

$$0 \to \mathrm{Hom}(\eta, \eta) \to \mathrm{Hom}(\eta, \mathbb{K}^{n+1}) \to \mathrm{Hom}(\eta, \eta^{\perp}) \to 0$$

であるので

$$0 \to \mathbb{K} \to \eta^* \oplus \cdots \oplus \eta^* \to T(P^n(\mathbb{K})) \to 0$$

を得る．この完全系列から証明できる．(この議論はグラスマンでも通用する）． ■

そこで両辺の全スティーフェルホイットニー類 $W = 1 + w_1 + w_2 + \cdots$ をとれば，

$$W(T(P^n(\mathbb{K}))) = (1-c)^{n+1} = (1+c)^{n+1} = 1 + (n+1)c + \frac{n(n+1)}{2}c^2 + \cdots$$

となる．ここで

$$c = \begin{cases} w_1(\eta) \in H^1(M, \mathbb{Z}_2) & \mathbb{K} = \mathbb{R} \\ w_2(\eta_{\mathbb{R}}) \in H^2(M, \mathbb{Z}_2) & \mathbb{K} = \mathbb{C} \\ w_4(\eta_{\mathbb{R}}) \in H^4(M, \mathbb{Z}_2) & \mathbb{K} = \mathbb{H} \end{cases}$$

そこで $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ の時には，

$$w_1(P^n(\mathbb{R})) = (n+1)c, \quad w_2(P^n(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2}c^2$$

であるので $(n+1) \equiv 0$ かつ $\frac{n(n+1)}{2} \equiv 0$ ならスピン構造が存在する．これは $n \equiv 3 \mod 4$ のときである，

次に $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ の時には，

$$w_1(P^n(\mathbb{C})) = 0, \quad w_2(P^n(\mathbb{C})) = (n+1)c$$

であるので $(n+1) \equiv 0$ ならスピン構造が存在する．これは $n \equiv 1 \mod 2$ のときである．$\mathbb{K} = \mathbb{H}$ ならスピン構造は必ず存在する．以上から

Proposition 3.7.
$P^n(\mathbb{R})$ がスピン $\iff$ $n \equiv 3 \mod 4$
$P^n(\mathbb{C})$ がスピン $\iff$ n が奇数
$P^n(\mathbb{H})$ がスピン $\iff$ すべての n

Remark 3.7. $P^n(\mathbb{H})$ は四元数ケーラー多様体である．$P^n(\mathbb{H}) = Sp(n+1)/(Sp(n)\times Sp(1))$ であり，構造群 $Sp(n)Sp(1)$ は $Sp(n)\times Sp(1)$ にリフトする．このことからスピン構造が存在することもわかる．

また 4 次元多様体 $P^2(\mathbb{C})$ はスピン多様体でない（スピン c 多様体にはなるけど）.

4. 上で見たことからコンパクト向きつきで次元が 4 以下の多様体ならスピン c 構造は必ず存在する．また $n \leq 3$ のコンパクト向きつき多様体ならスピン構造は必ず存在する.

5. 微分位相幾何の知識が必要とする結果を述べる．証明は省略（Spin Geometry を参考）.

Proposition 3.8. M を向きつきリーマン多様体とする．さらに $H_2(M,\mathbb{Z}) \to H_2(M,\mathbb{Z}_2)$ が全射とする（例えば単連結なら普遍係数定理から全射）．このとき

(a) $n \geq 5$ なら「M がスピン」$\iff$「任意のコンパクト向きつき曲面で M に埋め込まれたものに対してその法ベクトル束が自明」.

(b) $n = 4$ の時,「M がスピン」$\iff$「任意のコンパクト向きつき曲面で M に埋め込まれたものに対してその法ベクトル束のオイラー数が偶数」

Proposition 3.9. M を単連結とする（上の条件より強い条件）.

(a) $n \geq 5$ なら「M がスピン」$\iff$「任意の埋め込まれた 2 次元球面の法ベクトル束が自明」.

(b) $n = 4$ の時,「M がスピン」$\iff$「任意の $y \in H^2(M,\mathbb{Z})$ に対して $(y \cup y)[X] \equiv 0 \mod 2$」

この命題の一つの応用例を述べよう．次の整数値行列を考える.

$$E_8 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

この固有値はすべて正なので符号数は 8 である．さて，Freedman の定理から「E_8 を交叉形式としてもつ単連結４次元閉位相多様体が存在する」．さらに上で述べた命題からこの多様体にはスピン構造が入る（対角成分が偶数なら任意の元 u に対して $(u \cup u)[M]$ は偶数である）．一方で，Rochlin は「４次元**微分**可能多様体の符号数は 16 で割り切れる」ことを証明した（指数定理を使う．４次元の場合にはスピノール空間に四元数構造が入ったが，それが指数にも遺伝することによる）．よって，今構成した単連結４次元閉位相多様体には微分構造が入らないことがわかる．

Remark 3.8. 符号数が１６で割れる４次元多様体があっても微分構造が入るというわけではない．実際 Donaldson 理論から $E_8 \oplus E_8$ を交叉形式にもつ単連結４次元閉多様体は符号数１６であるが，微分構造が入らないことが知られている．

6. 代数多様体のスピン構造について見てみる．$P^{n+1}(\mathbb{C})$ 内で次数 d の斉次次多項式から定義される非特異超曲面を考える．つまり特異点がなく複素 n 次元複素多様体 M となるものである．これは $P^{n+1}(\mathbb{C})$ のケーラー形式 ω を制限することによりケーラー多様体になる．$P^{n+1}(\mathbb{C})$ の超平面直線束 H に対して $H^0(P^{n+1}(\mathbb{C}), \mathcal{O}(H^d))$（正則切断の空間）を考えるとこれは次数 d の斉次多項式と同一視される．M を定める多項式はこの直線束の切断とみなせ，そのゼロ点集合が M である．そして M の法束は $H^d|_M$ と同型である（この法束は M を因子として考えたときの直線束である)．そこで $c_1(N)$ は $i^*c_1(H^d) = d\eta$ となる．ここで η はケーラー形式から決まるコホモロジー類

Proof. 位相幾何からの準備「$E \to X$ をベクトル束として Z を横断的切断のゼロ点集合とする．このとき Z は X の部分多様体であり，その Normal 束は $E|_Z$ と同型である」「さらに X が向きつきで E にもベクトル束としての向きが入っていたら，そのオイラー類は Z のポアンカレ双対である」（Bott-Tu p133-135）．この事実から M の法束が $H^d|_M$ となることがわかる．そして，$c_1(H^d)$ は M のポアンカレ双対であり，$c_1(N) = i^*c_1(H^d)$ となる．

また $c_1(H) = [\omega]$ であった．これは $P^{n+1}(\mathbb{C})$ 内で超平面 H の Poincare 双対つまり法直線束の c_1 が $[\omega]$ であることを意味する．実際 H と横断的に交わる $P^1(\mathbb{C})$ を考えれば $\int_{P^1(\mathbb{C})} \omega = 1 = H \cdot P^1(\mathbb{C})$ となる．よって $c_1(N) = d\eta$ を得る． ■

さて，

$$T(P^{n+1}(\mathbb{C}))|_M = TM \oplus N$$

であるので，

$$c(TM) = (1+\eta)^{n+2}(1+d\eta)^{-1} = (1+\eta)^{n+2}(1 - d\eta + d^2\eta^2 - \cdots)$$

となり

$$c_1(M) = (n+2)\eta - d\eta = (n+2-d)\eta$$

が成立する．よって $w_2(M) \equiv c_1(M) \mod 2$ であるので $n+d = even$ なら M はスピン多様体である．例えば，$P^3(\mathbb{C})$ 内の $\{(z_0, z_1, z_2, z_3) | z_0^4 + z_1^4 + z_2^4 + z_3^4 = 0\}$ となる複素曲面はスピン多様体である（これが K3 曲面と言われているもの）．

より一般に $P^{n+k}(\mathbb{C})$ 内の次数 d_i の斉次次多項式から定義される非特異超曲面 $V^{n+k-1}(d_i)$ の横断的交わりで与えら得る複素多様体 $V^n(d_1, \cdots, d_k)$ をを考えたとき，$n+k+1+\sum_{i=1}^k d_i$ が偶数なら $V^n(d_1, \cdots, d_k)$ はスピン多様体になる．

Proof. $V^n(d_1, d_2) \subset P^{n+2}(\mathbb{C})$ の場合のみ証明する．一般の場合も同様にすればよい．$V^n(d_1, d_2)$ は $H^{d_1} \oplus H^{d_2}$ のある切断のゼロ点集合とみなせる．そこで $V^n(d_1, d_2)$ のポアンカレ双対は $e(H^{d_1} \oplus H^{d_2}) = e(H^{d_1})e(H^{d_2}) = c_1(H^{d_1})c_1(H^{d_2})$ である．また $V^{n+1}(d_1), V^{n+1}(d_2)$ のポアンカレ双対はそれぞれ $c_1(H^{d_1}), c_1(H^{d_2})$ である．そこで

$$\int_{V(d_1,d_2)} \alpha = \int_{P^{n+2}(\mathbb{C})} \alpha \wedge c_1(H_2^d) \wedge c_1(H_1^d) = \int_{V(d_1)} \alpha \wedge c_1(H^{d_2}), \quad \forall \alpha$$

が成立する．つまり $V(d_1)$ 内での $V(d_1, d_2)$ のポアンカレ双対は $c_1(H^{d_2})$ を $V(d_1)$ へ制限したものに等しい．そこで

$$0 \to TV^n(d_1, d_2) \to TV^{n+1}(d_1) \to N \to 0$$

を考えれば.

$$c(TV^n(d_1, d_2)) = c(TV^{n+1}(d_1))c(N)^{-1} = (1+\eta')^{n+2}(1+d_1\eta')^{-1}(1+d_2\eta')^{-1}$$

となる．これを用いればよい． ■

Remark 3.9. 実は $n \geq 2$ なら逆（スピンなら $n+k+1+\sum_{i=1}^k d_i$ が偶数）も成立する．これには複素幾何の Lefschetz 定理などのテクニックを使う．[5] をみよ．

そのほかにも代数幾何（というより複素幾何）の公式をいろいろ使うことにより，スピン構造の存在について議論できる（これについては Hitchin の「Harmonic Spinor」[5] がよい．上で述べたことも [5] を参考にしている）．

7. スピン多様体の被覆空間には自然にスピン構造が入る．これは単に引き戻せばよい．逆にあるスピン多様体を離散群で割ったものにスピン構造がはいるかという問題があるが，これについては [1] にいくつかの例が紹介されている．

3.6　積多様体，部分多様体とスピン構造

二つの多様体 M_1, M_2 の積 $M_1 \times M_2$ を考える．$T(M_1 \times M_2) = p_1^*(TM_1) \oplus p_2^*(TM_2)$ となる．そこで全スティーフェルホイットニー類を考えると，

$$\begin{aligned} W(T(M_1 \times M_2)) &= p_1^* W(TM_1) p_2^* W(TM_2) \\ &= p_1^*(1 + w_1(M_1) + w_2(M_1) + \cdots) p_2^*(1 + w_1(M_2) + w_2(M_2) + \cdots) \\ &= 1 + (w_1(M_1) + w_1(M_2)) + (w_1(M_1) w_1(M_2) + w_2(M_1) + w_2(M_2)) + \cdots \end{aligned}$$

から

$$w_1(M_1 \times M_2) = w_1(M_1) + w_1(M_2), \quad w_2(M_1 \times M_2) = w_1(M_1) w_1(M_2) + w_2(M_1) + w_2(M_2)$$

を得る．よって $M_1 \times M_2, M_1, M_2$ のうち，いずれか二つがスピン多様体ならもう一つもスピン多様体になる．

そこで $M_1, M_2, M_1 \times M_2$ がスピン多様体として，そのスピン構造を考えよう．まず次の Künneth の公式を考える

$$H^n(M_1 \times M_2) = \oplus_{p+q=n} H^p(M_1) \otimes H^q(M_2).$$

簡単のため M_1, M_2 は連結であると仮定すれば

$$\begin{aligned} H^0(M_1 \times M_2, \mathbb{Z}_2) &= H^0(M_1, \mathbb{Z}_2) \otimes H^0(M_2, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2 \\ H^1(M_1 \times M_2, \mathbb{Z}_2) &= H^1(M_1, \mathbb{Z}_2) \otimes H^0(M_2, \mathbb{Z}_2) \oplus H^0(M_1, \mathbb{Z}_2) \otimes H^1(M_2, \mathbb{Z}_2) \\ &= H^1(M_1, \mathbb{Z}_2) \oplus H^1(M_2, \mathbb{Z}_2) \end{aligned}$$

が成立する．

そこでまず向きについて考える．M_1, M_2 の向きを定めれば $M_1 \times M_2$ の向きが定まる．逆に $M_1 \times M_2$ の向きが定まったとき，M_1, M_2 の向きを決めることはできないことに注意する．しかし $M_1 \times M_2, M_1$ の向きが定まれば M_2 の向きも定まる．よって $M_1, M_2, M_1 \times M_2$ のうち二つに向きが定まれば，残りにも向きが定まる．

次にスピン構造を見ていく．まず局所的な話をする．$SO(n_1) \times SO(n_2) \subset SO(n_1 + n_2)$ を考える．このときスピン群の積 $Spin(n_1) \times Spin(n_2)$ を $Spin(n_1 \times n_2)$ へ埋め込むことはできない．$Spin(n_i) = \exp \mathfrak{spin}(n_i) \subset Spin(n_1 + n_2)$ をつくることはでき，$Spin(n_1), Spin(n_2)$ は可換である．しかし，$Spin(n_1) \cap Spin(n_2) = \{\pm 1\}$ である．つまり $SO(n_1) \times SO(n_2)$ の二重被覆群は $Spin(n_1) \otimes Spin(n_2) := Spin(n_1) \times Spin(n_2)/\{\pm 1\}$ である．このことに注意して大域的な話をしよう．まず，M_1, M_2 のスピン構造から $M_1 \times M_2$ のスピン構造が自然に定まることをチェックコホモロジーを使って見てみよう．$\mathbf{SO}(M_i)$ の推移関数を $g_{i_1 j_1} : U_{i_1} \cap U_{j_1} \to SO(n_1)$, $g_{i_2 j_2} : V_{i_2} \cap V_{j_2} \to SO(n_2)$ とすれば，$W_{i_1, i_2} = U_{i_1} \times V_{i_1}$ が $M_1 \times M_2$ の被覆になる．そして $\mathbf{SO}(M_1 \times M_2)$ の推移関数は

$$\begin{aligned} &g_{(i_1,i_2),(j_1,j_2)}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} g_{i_1 j_1}(x_1) & 0 \\ 0 & g_{i_2 j_2}(x_2) \end{pmatrix} \\ &: (U_{i_1} \times V_{i_2}) \cap U_{j_1} \times V_{j_2} = (U_{i_1} \cap U_{j_1}) \times (V_{i_2} \cap V_{j_2}) \to SO(n_1 + n_2) \end{aligned}$$

となる．M_1, M_2 のスピン構造として $h_{i_1j_1} \in Spin(n_1), h_{i_2j_2} \in Spin(n_2)$ というリフトを考える．このとき

$$h_{(i_1,i_2),(j_1,j_2)}(x_1,x_2) = h_{i_1j_1}(x_1) \otimes h_{i_2j_2}(x_2) \in Spin(n_1) \otimes Spin(n_2) \subset Spin(n_1 \times n_2)$$

とすれば，これは cocycle であるので $M_1 \times M_2$ のスピン構造が定まる．さらに Künneth 公式から $H^1(M_1 \times M_2, \mathbb{Z}_2)$ の元は $p_1^* H^1(M_1, \mathbb{Z}_2)$ の元と $p_2^* H^1(M_2, \mathbb{Z}_2)$ の元の和でかけていたので，他のスピン構造は

$$h_{(i_1,i_2),(j_1,j_2)}(x_1,x_2) z_{i_1j_1}(x_1) z_{i_2j_2}(x_2) = h_{i_1j_1}(x_1) z_{i_1j_1}(x_1) \otimes h_{i_2j_2}(x_2) z_{i_2j_2}(x_2) \in Spin(n_1 \times n_2)$$

とかける．

逆に $M_1 \times M_2$ のスピン構造が定まっていたする．このときその推移関数は上の形と仮定してよい．よって **$M_1 \times M_2$ のスピン構造が定まれば M_1, M_2 のスピン構造が自動的に定まる**（M_1 のスピン構造を定めなくても M_2 のスピン構造が定まる）．

次に多様体 M 上の二つの実ベクトル束 E, E' があった場合を考える．まず，上と同様にして．$E \oplus E', E, E'$ のうちどれか二つがスピン（$w_2 = 0$）なら，もう一つもスピンである．また $E \oplus E', E, E'$ のどれか二つに向きが定まれば，もう一つにも向きが定まる．先ほどとの違いはスピン構造のとり方である．$E \oplus E'$ にスピン構造が定まったとしても E_1, E_2 に自動的にスピン構造が定まるわけではない．このことを見てみよう．$g_{ij}, g'_{ij} : U_i \cap U_j \to SO(n)$ を推移関数とする．このときの $E \oplus E'$ の推移関数 G_{ij} はこの二つを diagonal にならべたものである．E, E' にスピン構造 h_{ij}, h'_{ij} が定まれば，$H_{ij} = h_{ij} \otimes h'_{ij}$ として $E \oplus E'$ にもスピン構造 H_{ij} が定まる．そのほかのスピン構造は $H_{ij} z_{ij}$ となる．ここで $[z_{ij}] \in H^1(M, \mathbb{Z}_2)$ であるが，これは先ほどと違い標準的に split するわけではない．つまり $z_{ij} = w_{ij} w'_{ij}$（$[w_{ij}], [w'_{ij}] \in H^1(M, \mathbb{Z}_2)$）とする方法は唯一つには定まらない．つまり E, E' のスピン構造は，$[z_{ij}]$ をどのように split させるかで異なってくる．そこで $E \oplus E'$ のスピン構造を $H_{ij} z_{ij}$ として E のスピン構造を $h_{ij} w_{ij}$ とすれば，これらから E' のスピン構造が唯一つ $h'_{ij} z_{ij} w_{ij}^{-1}$ として定まることになる．よって **$E \oplus E', E, E'$ のどれか二つにスピン構造を定めれば，残りにもスピン構造が定まる**ことがわかる．

次に部分多様体のスピン構造について考える．$M \subset X$ を部分多様体とする．このとき法束 NM が定まる．そして $TX|_M = TM \oplus NM$ が成立する．そこで

$$i^* w_1(TX) = w_1(TM) + w_1(NM), \quad i^* w_2(TX) = w_1(TM) w_1(NM) + w_2(NM) + w_2(TM)$$

となる．X 及び M をスピン多様体として向きとスピン構造を固定する．よって $TX|_M$, TM に向きとスピン構造が入る．このとき自然に NM にも向きとスピン構造入る．また，TX と NM がスピンとした場合には，**部分多様体 $M \subset X$ を考えたとき X のスピン構造と NM のスピン構造から TM にスピン構造が定まる**.

Example 3.5. 境界付きスピン多様体 M の境界 ∂M を考える．M の向きから通常の方法で ∂M に向きが定まる（ストークスの定理が成り立つようにする向き）．内向き

normalの方向の座標をy_nとし，∂Mの座標を$(y_1, \cdots, y_{n-1})$とする．$(y_1, \cdots, y_{n-1}, y_n)$が$M$の正の座標とする．このとき$n$が偶数なら$(y_1, \cdots, y_{n-1})$を正，$n$が奇数なら負と定める．別の言い方をすれば，$(-1)^n dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_{n-1} > 0$とするのである．次にスピン構造をいれよう．微分多様体のカラー近傍の存在から∂Mの近傍で$\partial M \times [0,1)$の形であり，積の形になっている（もちろん一般に計量込みでこのようになるとは限らない）．そこでM**のスピン構造から自然に制限として**∂M**へのスピン構造が定まる**.

Remark 3.10. この境界へのスピン構造は，スピン同境群といわれる微分可能スピン多様体の不変量を考える際に使われるものである．二つのn次元スピン多様体があって，それらがある$n+1$次元スピン多様体の（スピン構造も含めて）境界となるときに同値とみなす．これはスピン多様体全体の同値関係になる．群構造は単に多様体の和（非連結和）を考える．また多様体の直積によって環構造も入る．詳しくは[2]などを見よ．

積多様体や部分多様体の場合にクリフォード代数やスピノール束がどうなるかについて議論すべきである．特に部分多様体の場合にクリフォード代数やスピノール束がどうなるかは，部分多様体上のディラック作用素を扱う際にとても重要である．しかし，それらについては別の機会で述べることにする．

参考文献

[1] Th. Friedrich *Dirac operators in Riemannian Geometry,* Graduate Studies in Mathematics 25, AMS

[2] H. B. Lawson and M. L. Michelsohn, *Spin Geometry,* Princeton Univ. Press, Princeton, 1989.

[3] R. Bott and L.W. Tu *Differential Forms in Algebraic Geometry*, GTM 82, Springer.

[4] S. Salamon, *Quaternionic Kähler manifolds,* Invent. Math. **67** 143-171 (1982).

[5] N. Hitchin, *Harmonic spinors,* Adv. in Math. **14**, 1-55, (1974).

索 引