スピン幾何入門その２
幾何構造とスピン群，古典群の表現

本間 泰史 *

「スピン幾何入門２」では.「スピン幾何入門１」に続いて，スピン群に関する話である．まず，スピンｃ群を学ぶ．次に，ユークリッド空間に幾何構造が入った場合を考える．それはエルミート構造や四元数エルミート構造などである．これらは大域的にはケーラー構造や四元数ケーラー構造などと対応することになる．幾何構造が入った場合には，その幾何構造に付随したリー群（$SO(n)$ のある部分群）を得る．このリー群とスピン群，スピンｃ群との関係，そしてスピノール表現との関係について議論する．

また，古典群の表現論について述べる．特に，幾何学を行う際，重要となるであろう表現論におけるいくつかの事実を論じる．

予備知識としては大島・小林「リー群とリー環」[8] などを必要とする．表現論に詳しくない場合は，ある程度の結果は認めてしまって幾何での表現論の使用方法の習得を目的したほうがよい．

目 次

*理科大理工, version.2005.9.10（多分最終版）

1　表現論の練習

表現論の基本的な結果を述べ，$SU(2)$, $SU(3)$ の表現論で練習をする．

1.1 基本的な事柄

Definition 1.1. リー群 G の**表現**とは，複素ベクトル空間 V と（C^∞ な）準同形 $\pi : G \to GL(V)$ の組のことである．V を表現空間または G **加群**とよぶ．また表現を G が V へ作用しているということもある．

リー環 $\mathfrak{g}$ の表現とは，複素ベクトル空間 V と環準同形 $\pi : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ の組のこと．

Definition 1.2. エルミート内積 $(\cdot,\cdot)$ の入った表現空間 V を考える．この空間に G が作用して，$(\pi(g)v, \pi(g)w) = (v, w)$（$\forall g \in G, \forall v, w \in V$）が成立するとき，表現を**ユニタリ表現**とよぶ．

リー環の場合には，$(\pi(X)v, w) + (v, \pi(X)w) = 0$（$\forall X \in \mathfrak{g}, \forall v, w \in V$）が成立するときにユニタリ表現とよぶ．

Remark 1.1. リー環はリー群の無限小表示であるので，$(\pi(\exp tX)v, \pi(\exp tX)w) = (v, w)$ を微分すれば，$(\pi(X)v, w) + (v, \pi(X)w) = 0$ を得る．

Proposition 1.1. コンパクトリー群 G の有限次元表現を考える．このとき，ユニタリ表現になるようにエルミート内積を入れることができる．

Proof. V の勝手なエルミート内積 $(\cdot,\cdot)$ を選ぶ．そして，

$$(v, w)_{inv} = \frac{1}{vol(G)} \int_G (gv, gw) dg$$

と積分すればよい．ここで，G がコンパクトだから積分可能． ■

我々が扱うのはコンパクト群の表現なので，**最初から表現はユニタリ表現と仮定**する．

Definition 1.3. 表現空間 V が非自明な G 不変部分空間をもつとき**可約**とよぶ．それ以外の時を**既約**とよぶ．(部分空間 W が G 不変とは，$GW \subset W$ となること．また $V, \{0\}$ は不変部分空間であるが，これらは自明な不変部分空間とよぶ）．また表現空間が既約表現空間の直和に分解できるとき，**完全可約**とよぶ．

リー環の表現の既約や可約なども同様である．

Proposition 1.2. **コンパクトリー群 G の表現は完全可約**である．

Proof. V を G の表現として，ユニタリ表現としておく．$W \subset V$ が G 不変であるとすれば．$W \oplus W^\perp$ と分解できる．ここでユニタリ表現であることから $W^\perp$ も G 不変である．以下この作業を繰り返せばよい． ■

そこで，我々は**主に既約表現空間を考える**ことにする．

Definition 1.4. G の表現 $(\pi, V), (\pi', V')$ が**同値**とは，$\Phi : V \to V'$ というベクトル空間としての同型写像で，G の作用と可換なものが存在することをいう．（$\Phi(\pi(g)v) = \pi'(g)\Phi(v)$（$\forall g \in G, \forall v \in V$））．また，同値でないときは非同値とよぶ．

Proposition 1.3 (シューアの補題)**.** G の既約表現 $(\pi, V), (\pi', V')$ を考える．$\Phi : V \to V'$ が G 線形とする．つまり $\Phi(\pi(g)v) = \pi'(g)\Phi(v)$（$\forall g \in G, \forall v \in V$）が成立するとする．このとき，$V$ と V' が非同値なら $\Phi = 0$ である．同値なら，V と V' を同一視することにより，$\Phi = \lambda \mathrm{id}$（$\lambda \in \mathbb{C}$）となる（$\lambda = 0$ もありえることに注意）．

Definition 1.5. 表現 $(\pi, V), (\pi', V')$ に対して G **線形写像の全体を** $\mathrm{Hom}_G(V, V')$ **と書く**.

Corollary 1.4. 既約表現 $(\pi, V), (\pi', V')$ に対して，

$$\mathrm{Hom}_G(V, V') = \begin{cases} 0 & \pi \not\simeq \pi' \\ \mathbb{C} & \pi \simeq \pi' \end{cases}$$

Proof of proposition. 線形写像 $\Phi : V \to V'$ が G 線形であるので，$\ker \Phi$, $\mathrm{Image}\Phi$ は G 不変部分空間である．そこで，$\Phi \neq 0$ なら，既約性から $\ker \Phi = 0$ および，$\mathrm{Image}\Phi = V'$ を得る．よって．Φ は同型写像であり，$\pi \simeq \pi'$ となる．このように，$\pi \not\simeq \pi'$ なら $\Phi = 0$ となる．

同値な場合には，G 線形同型写像 $T : V \to V'$ が存在する．そこで，$T^{-1} \circ \Phi : V \to V$ を，新たに Φ として考えてよい．Φ の固有値の一つを λ とする．このとき $\Phi - \lambda$ も G 線形写像である．$\ker(\Phi - \lambda)$ は $\{0\}$ でない G 不変部分空間であるので既約性から $\ker(\Phi - \lambda) = V$ となる，よって，$\Phi = \lambda \mathrm{id}$ となる． ■

Example 1.1. G のユニタリ表現 (π, V) を考える．このとき双対空間 V^* 上で，

$$(\pi(g)f)(v) = f(\pi(g^{-1})v), \quad f \in V^*, v \in V$$

により，V^* 上の表現を得ることができる（表現になることは演習問題）．これを**転置表現**または**双対表現**とよぶ.

また，V の共役空間 $\bar{V}$ を考える．つまり

$$\bar{V} := \{\bar{v} \mid v \in V\}$$

という集合であり，$\bar{v} + \bar{w} = \overline{v + w}$, $z \cdot \bar{v} = \bar{z}\bar{v}$ によりベクトル空間の構造を入れたものである.（$\bar{v}$ は v の複素共役とは限らない．複素共役が定義できるには V に実構造が必要である）．このとき，

$$\pi(g)\bar{v} = \overline{\pi(g)v}, \quad v \in V$$

により，$\bar{V}$ は G の表現空間になる．これを**共役表現**という．さらにユニタリ表現なら，エルミート内積を使って $V^* \simeq \bar{V}$ という線形同型が作れるが，これは G 線形になる．よって，V **の共役表現と双対表現は同値になる**ことがわかる．

Example 1.2. 表現 (π, V), (π', V') から，表現を作ることができる．

1. $V \otimes V'$ は $(\pi \otimes \pi')(g) := \pi(g) \otimes \pi'(g)$ とすれば，G 加群になる．これを**テンソル積表現**とよぶ．
2. V の**交代テンソル積**$\Lambda^k(V)$ を考える．上と同様に G 加群であることがわかる．
3. V の**対称テンソル積**$S^k(V)$ を考えると，これは G 加群．
4. $\mathrm{Hom}(V, V')$ は G 加群．

などなど，線形代数の基本的な操作を使えば，表現をたくさんつくることができる．

Definition 1.6. （実）リー環 $\mathfrak{g}$ の複素化 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$ は自然に $\mathbb{C}$ 上のリー環になる．これをリー環の**複素化**とよぶ．逆に，$\mathfrak{g}$ を $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の**実形**とよぶ．

Example 1.3. $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, $\mathfrak{u}(n)$, $\mathfrak{u}(p, q)$（$p + q = n$）の複素化は $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ である．

Definition 1.7. リー群 G と部分群 H に対して，$\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{h}$ が複素化と実形の関係にあるとき，複素リー群 G を H に複素化といい，H を複素リー群 G の実形とよぶ．

Example 1.4. $GL(n, \mathbb{R})$, $U(n)$, $U(p, q)$ の複素化は $GL(n, \mathbb{C})$ である．

我々が考えるのはコンパクト群であるが，その場合には次が成立する．

Proposition 1.5. 連結コンパクト群に対して，同型を除いて複素化がただひとつ存在する．

証明は，小林・大島「Lie 群と Lie 環」を見よ（easy）．またコンパクト群でない場合には，複素化が存在しないリー群や複素化が存在しても一つとは限らない例がある．

Proposition 1.6 (Weyl のユニタリトリック)**.** $G_{\mathbb{C}}$ を連結かつ**単連結**な複素リー群として，G をその実形とする．また V を $\mathbb{C}$ 上の有限次元ベクトル空間とする．このとき次は自然に一対一対応する．

1. リー環 $\mathfrak{g}$ の V 上の表現.

2. 複素リー環 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の V 上の（複素）表現.

3. リー群 G の V 上の表現.

4. 複素リー群 $G_{\mathbb{C}}$ の V 上の正則表現.（正則は *holomorphic* の意味）

Proof. リー環 $\mathfrak{g}$ の表現から複素リー環 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の表現をつくるには，$\pi(X+\sqrt{-1}Y) = \pi(X)+\sqrt{-1}\pi(Y)$ とすればよい．複素リー環 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ から複素リー群の表現を作るには，$G_{\mathbb{C}}$ を単連結としているので，次を可換にする $G_{\mathbb{C}} \to GL(V)$ が唯一つ存在することからわかる．

$$\begin{array}{ccc} G_{\mathbb{C}} & \xrightarrow{\pi} & GL(V) \\ {\scriptstyle\exp}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\exp} \\ \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} & \xrightarrow{\pi} & \mathrm{End}(V) \end{array}$$

複素リー群から実形への表現を得るには，実形 G へ制限すればよい．そして，実リー群からリー環 $\mathfrak{g}$ の表現は微分写像を考えればよい． ■

そこで**リー群の有限次元表現は複素リー環の有限次元表現に帰着**する．

リー群から表現論を扱うには，**指標**の理論を展開する．表現 (π, V) の指標とは

$$\chi(g) = \mathrm{tr}_V \pi(g)$$

のことである．$\chi(gtg^{-1}) = \chi(t)$ であるので，指標は極大トーラス上の関数である．例えば，$U(n)$ の既約表現の指標はシューア関数と呼ばれるものが対応する．(詳細は小林・大島「Lie 群と Lie 環」)．

一方，複素リー環の有限次元表現を扱うには，**weight 分解**の視点から議論を展開する．これは指標の無限小版だと思えばよい．どちらから攻めてもよいが，このノートではリー環から議論することが多い．

1.2 可換群の表現

可換群 $S^1 = U(1)$ 及びそのリー環 $\mathfrak{u}(1) = \sqrt{-1}\mathbb{R}$ の表現を見ていく．ここで指数写像は

$$\exp : \sqrt{-1}\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{2\pi i t} \in U(1)$$

としておく．

$U(1)$ の既約表現空間 V を考える．$g \in U(1)$ として，$\pi(g) : V \to V$ を考えると，$U(1)$ は可換群であるので，$\pi(g)$ は $U(1)$ 線形であり，シューアの補題から $\pi(g) = \lambda_g$（$\lambda_g \in \mathbb{C}$）となる．このように任意の元はスカラーで作用するので，**可換群の既約表現は 1 次元**となる．そこで一次元既約表現空間を考えればよい．よって，$U(1)$ から $U(1) \subset GL(1, \mathbb{C})$ への準同形写像 $\pi : U(1) \to U(1)$ を考えればよい．

この π の無限小表現を考えると，リー環 $\sqrt{-1}\mathbb{R}$ から $\sqrt{-1}\mathbb{R}$ への線形写像となる．つまり，$\pi : \sqrt{-1}\mathbb{R} \to \sqrt{-1}\mathbb{R}$ は $\pi(t) = \alpha t$（$\alpha \in \mathbb{R}$）とかけるので，表現 $\pi : U(1) \to U(1)$ は，$\pi(e^{2\pi i t}) = e^{\alpha 2\pi i t}$ となる．そして，well-defined となるには，$\alpha \in \mathbb{Z}$ でなければならない．つまり，$m \in \mathbb{Z}$ が存在して既約表現 π は $\pi_m : U(1) \ni g \to g^m \in U(1)$ とかけるのである．$m \neq n$ なら π_m と π_n は同値でないことは明らかである．

Proposition 1.7. **$U(1)$ の既約表現はすべて 1 次元であり，整数全体 $\mathbb{Z}$ により分類できる**．つまり，

$$\pi_m : U(1) \ni g \to g^m \in U(1) \subset GL(1, \mathbb{C})$$

が既約表現を与える．そして，任意の表現は，これら既約表現の直和として表される．

任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して，

$$\sqrt{-1}\mathbb{R} \ni t \mapsto \alpha t \in \sqrt{-1}\mathbb{R} \subset \mathfrak{gl}(1, \mathbb{C})$$

とすれば，これはリー環の既約ユニタリ表現である．$\alpha \in \mathbb{Z}$ となる条件は **integral 条件**と呼ばれるもので，**リー群の表現となるための必要十分条件**なのである．

トーラス群 $T^l = S^1 \times \cdots \times S^1$ を考えても，可換群であるので，上と同様の議論ができる．

Proposition 1.8. **トーラス群 T^l の既約表現はすべて 1 次元表現であり，$\mathbb{Z}^l$ で分類される**．つまり，既約表現は

$$\pi_{m_1, \cdots, m_l}(t_1, \cdots, t_l) = t_1^{m_1} \cdots t_l^{m_l}$$

で与えられる．一般の表現はこれらの直和である．つまり T^l が可換群であることから表現空間は**一次元に同時固有空間に分解される**のである．

$$V = \oplus_{m \in \mathbb{Z}^l} E(m_1, \cdots, m_l)$$

固有空間 $E(m_1, \cdots, m_l)$ の $(t_1, \cdots, t_l) \in T^l$ に関する固有値は $t_1^{m_1} \cdots t_l^{m_l}$ となる．

1.3 $SU(2)$ の表現論

面倒なので，表現を表す記号 π は省くこともある．つまり $\pi(g)v$ を gv と書く．

リー群 $SU(2)$ を考える．このリー群の部分群として，

$$T = \{ \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} \mid 0 \leq t \leq 2\pi \} \simeq S^1$$

を考える．これは**極大トーラス群**と呼ばれるものであり，極大な可換閉部分群である．

Proof. 極大であることを証明する．$T \subset T'$ なる可換群 T' が存在したとする．$g \in T'$, $g \notin T$ なる元を選ぶ．このとき T の任意の元と可換でなければならないので，直接計算により，$g \in T$ であることがわかる．よって，$T = T'$ である． ■

リー環 $\mathfrak{su}(2)$ の基底として，パウリ行列を選んでおく．

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

このとき，$\mathfrak{t} = \{t\sigma_1 | t \in \mathbb{R}\}$ は $\mathfrak{su}(2)$ の**極大可換環**であり，**カルタン部分環**とよばれる．そして，$\exp \mathfrak{t} = T$ となる（演習問題）．また，**複素化したリー環** $\mathfrak{su}(2) \otimes \mathbb{C} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ の基底として，

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \frac{1}{2}(\sigma_2 - i\sigma_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \frac{1}{2}(-\sigma_2 + i\sigma_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

を考える．これは

$$[H, X] = 2X, \quad [H, Y] = -2Y, \quad [X, Y] = H$$

を満たす.

さて，$SU(2)$ の $V = \mathbb{C}^2$ への**自然表現**を考える．つまり，

$$SU(2) \ni g \mapsto g \in SU(2) \subset GL(\mathbb{C}^2)$$

のこと．この表現を可換群 T へ制限すると同時固有分解され,

$$\mathbb{C}^2 = E(1) \oplus E(-1) = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$$

となる．ここで $E(\pm 1)$ のユニタリ基底を $v_{\pm 1}$ としておく．複素化したリー環の作用は,

$$Hv_+ = v_+, \quad Xv_+ = 0, \quad Yv_+ = v_-, \quad Hv_- = -v_-, \quad Xv_- = v_+, \quad Yv_- = 0$$

となることがわかる.

k 次対称テンソル積空間 $S^k(V)$ を考える．これは $k+1$ 次元空間であり，基底は

$$\{w_{k-2i} := v_+^{k-i} \odot v_-^i \mid i = 0, \cdots, k\}$$

で与えられる（ここで $\odot$ は対称テンソル積をあらわす）．この基底は H に関して $S^k(V)$ を分解したときの同時固有ベクトルになっていて，固有値は $k - i + (-i) = k - 2i$ となる．つまり,

$$S^k(V) = \oplus_i E(k-2i) = \oplus_i \mathbb{C}(w_{k-2i}), \quad Hw_{k-2i} = (k-2i)w_{k-2i}$$

となる．リー環の作用を考えると

$$Hw_{k-2i} = (k-2i)w_{k-2i}, \quad Xw_{k-2i} = iw_{k-2i+2}, \quad Yw_{k-2i} = (k-i)w_{k-2i-2}$$

となる．このように，X は

$$E(-k) \xrightarrow{X} E(-k+2) \xrightarrow{X} \cdots \xrightarrow{X} E(k-2) \xrightarrow{X} E(k) \xrightarrow{X} \{0\}$$

と固有値を上げる作用であり，逆に Y は固有値を下げる作用である．

$$\{0\} \xleftarrow{Y} E(-k) \xleftarrow{Y} E(-k+2) \xleftarrow{Y} \cdots \xleftarrow{Y} E(k-2) \xleftarrow{Y} E(k)$$

Lemma 1.9. $S^k(V)$ は既約表現である．

Proof. 不変部分空間 $W \subset S^k(V)$ が存在したとする．$v \neq 0$ なる元 $v \in W$ を勝手に取ってくる．$v = \sum a_i w_{k-2i}$ とかけるので，この v に X を何度もかけていけば，いつか必ず零になる．つまり，$X^l v \neq 0, X(X^l v) = 0$ なる元 $X^l v$ が存在するが，これは $X^l v = cw_k$ であることを意味する．そして Y を作用させていけば，w_{k-2i} を作れる．よって，$W = V$ となるので既約である． ■

Lemma 1.10. $SU(2)$ の任意の既約表現は $S^k(V)$（$\exists k$）と同値である．

Proof. 既約表現を W とする．これを T に関して同時固有分解する．$W = \oplus E(i)$ となる．ここで $E(i)$ の H に対する固有値を i としている．トーラス T の分解であるので，$i \in \mathbb{Z}$ となることに注意する．さて，有限次元表現を考えているので最大固有値を k としておく．$v \in E(k)$ に対して，$[H, X] = 2X$ より，$H(Xv) = (k+2)Xv$ を得る．つまり $Xv \neq 0$ なら固有値が最大であることに反するので，$Xv = 0$ を得る．つぎに，$[H, Y] = -2Y$ を使えば，固有値を下げることができ，$HYv = (k-2)Yv$ であり，$X(Yv) = YXv + Hv = kv$

$$XY^2v = [X, Y]Yv + YXYv = HYv + kYv = (k-2)Yv + kYv$$

などとなる．これを繰り返せば，

$$XY^l v = l(k-l+1)Y^{l-1}v$$

さて，$\{v, Yv, Y^2v, \cdots, \}$ は不変部分空間であるので $W = \{v, Yv, Y^2v, \cdots, \}$ となる．そこで，$Y^n v = 0$ かつ $Y^{n-1}v \neq 0$ とすれば，

$$0 = XY^n v = n(k-n+1)Y^{n-1}v$$

となり，$k-n+1 = 0$ が成立する．よって，$W = \{v, Yv, \cdots, Y^k v\}$ となる．X, Y, H の作用の仕方から $W = S^k(V)$ となることは明らかである． ■

以上のことから，$SU(2)$ の表現の仕組みが理解できたと思う．定式化してみよう．$SU(2)$ の既約表現 W を考える．ユニタリ表現であることから $\langle Zv, w\rangle + \langle v, Zw\rangle = 0$（$Z \in \mathfrak{su}(2)$）であるので，$\sqrt{-1}Z$ は W 上ではエルミート行列であり，固有空間分解でき，固有値は実数である．カルタン部分環 $\mathfrak{t}$ に対して，$\mathfrak{t}_{\mathbb{R}} = \sqrt{-1}\mathfrak{t}$ とする．可換であることから，この $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$ に対して同時固有分解を行い，$W = \oplus E(i)$ とする．これを **weight 分解**とよぶ．また，固有値を **weight**，固有ベクトルを **weight vector** とよぶ．weight は実数であるが，極大トーラスに関する分解にもなっているので，**weight は整数**である．

weight vector v で，$Xv = 0$ となるものを **highest weight vector** とよび，その weight を **highest weight** とよぶ．この highest weight は W の weight でもっとも大きいものである．

Example 1.5. $S^k(V)$ を **spin-$k/2$ 表現**とよぶ．$S^k(V)$ の固有分解 $\oplus_i E(k-2i)$ が **weight 分解**である．固有値 $k-2i$ が weight．また k が **highest weight** である．

Theorem 1.11. *$SU(2)$* **の有限次元既約表現は** $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ **によって分類される．** 各 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して，自然表現の k 次対称テンソル積 $V_k := S^k(V)$ が対応する．また，k は表現の *highest weight* である．

Example 1.6. $SU(2)$ のリー環 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ への随伴表現を考える．

$$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) = E(2) \oplus E(0) \oplus E(-2) = \mathbb{C}(X) \oplus \mathbb{C}(H) \oplus \mathbb{C}(Y)$$

となる．リー環に対する weight 分解を**ルート分解**とよび，各 weight を**ルート**とよぶ．

Example 1.7. $SU(2)$ の自然表現を考える．このとき

$$\mathfrak{J}; \mathbb{C}^2 \ni (\alpha, \beta) \mapsto (-\bar{\beta}, \bar{\alpha}) \in \mathbb{C}^2$$

という写像を考える．これは複素歪線形であり，$\mathfrak{J}^2 = -1$ であるので，四元数構造である．さらに，$\mathfrak{J}(g(\alpha,\beta)) = g\mathfrak{J}(\alpha,\beta)$ であるので，$SU(2)$ の作用と可換である．このように，$SU(2)$ の自然表現空間には，作用と可換な四元数構造がはりる．同様に，$\mathfrak{J}^{\otimes k} : (\mathbb{C}^2)^{\otimes k}$ には，k が偶数なら実構造がはいり，k が奇数なら四元数構造がはいる．よって $S^k(V)$ には，k が偶数なら実構造がはいり，k が奇数なら四元数構造がはいる．

別の見方をすれば，四元数構造とエルミート内積から，複素シンプレクティック構造 $\Omega((\alpha,\beta),(\alpha',\beta')) = \alpha\beta' - \alpha'\beta$ が自然に定まるが，これが作用で不変であると言ってもよい．そこで，k が偶数なら複素対称形式がはいり，k が奇数なら複素交代形式がはいる．

1.4 クレブッシュ-ゴルダン定理

次に既約表現 (π_k, V_k) と (π_l, V_l) のテンソル積表現を考えてみる．上で構成したような基底をそれぞれ $\{w_k, w_{k-2}, \cdots, w_{-k}\}$, $\{v_l, v_{l-2}, \cdots, v_{-l}\}$ としておく．

$$H(w_k \otimes v_l) = (Hw_k) \otimes v_l + w_k \otimes Hv_l = (k+l) w_k \otimes v_l, \quad X(w_k \otimes v_l) = 0$$

であるので，$w_k \otimes v_l$ は highest weight vector である．そして $w_k \otimes v_l$ に Y を作用させていけば V_{k+l} を作れる．よって，$V_{k+l} \subset V_k \otimes V_l$ となることがわかる．

同様に，

$$X(w_k \otimes v_{l-2} - w_{k-2} \otimes v_l) = w_k \otimes v_l - w_k \otimes v_l = 0$$
$$H(w_k \otimes v_{l-2} - w_{k-2} \otimes v_l) = (k+l-2)(w_k \otimes v_{l-2} - w_{k-2} \otimes v_l)$$

となるので，$V_{k+l-2} \subset V_k \otimes V_l$ を得る．一般に，

$$
\begin{aligned}
& X\{\sum_{i=0}^{s} \binom{s}{i}(-1)^i w_{k-2i} \otimes v_{l-2(s-i)}\} \\
=& \sum_{i=1}^{s} \binom{s}{i}(-1)^i i w_{k-2(i-1)} \otimes v_{l-2(s-i)} + \sum_{i=0}^{s-1} \binom{s}{i}(s-i)(-1)^i w_{k-2i} \otimes v_{l-2(s-i-1)} \\
=& \sum_{j=0}^{s-1} \binom{s}{j}(s-j)(-1)^{j+1} w_{k-2j} \otimes v_{l-2(s-j-1)} + \sum_{j=0}^{s-1} \binom{s}{i}(s-i)(-1)^i w_{k-2i} \otimes v_{l-2(s-i-1)} \\
=& 0 \\
& H\{\sum_{i=0}^{s} \binom{s}{i}(-1)^i w_{k-2i} \otimes v_{l-2(s-i)}\} = (k+l-2s)\{\sum_{i=0}^{s} \binom{s}{i}(-1)^i w_{k-2i} \otimes v_{l-2(s-i)}\}
\end{aligned}
$$

となるので，$V_{k+l-2s} \subset V_k \otimes V_l$ $(s = 0, 1, \cdots, \min\{k, l\})$ となる．さらに，$\dim V_{k+l-2s} = k+l-2s+1$, $\dim V_k \otimes V_l = (k+1)(l+1)$ となることを考えれば，これらで既約成分は尽きることがわかる．

Theorem 1.12. 既約表現 (π_k, V_k) と (π_l, V_l) のテンソル積表現を既約分解すると次のようになる．

$$V_k \otimes V_l = V_{k+l} \oplus V_{k+l-2} \oplus V_{k+l-4} \oplus \cdots \oplus V_{|k-l|}$$

これを**クレブッシュ-ゴルダンの定理**という．

1.5 $SO(3)$ の表現

次に $SO(3)$ の表現について考えていこう．$SO(3)$ の二重被覆群 $Spin(3) = SU(2) \to SO(3)$ は普遍被覆であることに注意する．$SO(3)$ の既約表現を考えると，$SU(2)$ の表現へと必ずリフトさせることが可能である．既約性なども保たれる．

逆に $SU(2)$ の表現が $SO(3)$ の表現へ落ちるかどうかを考える．実は，$SU(2)$ の表現は $SO(3)$ の表現に落ちるとは限らない．$S^k(V)$ の k が偶数の場合のみ $SO(3)$ の表現となるのである．

$SU(2)$ の $\mathfrak{su}(2) \simeq \mathbb{R}^3$ への随伴表現を考えると，$\mathrm{Ad} : SU(2) \to SO(3)$ という二重被覆を与えるのであった．そこで，$SU(2)$ の極大トーラス群 T に対応して，$SO(3)$ の極大トーラス群として，

$$T' = \mathrm{Ad}(T) = \{\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid 0 \le t < 2\pi\} \simeq S^1 = SO(2)$$

をとる．ここでも $\mathrm{Ad}: T \to \mathrm{Ad}(T)$ は $U(1) = S^1$ の二重被覆になっている．このカルタン部分環は

$$\mathfrak{t}' = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{H' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\}$$

となる．$SO(3)$ の既約表現 W を考えて，これを極大トーラス群 $\mathrm{Ad}(T)$ に対して，固有空間分解する（または $\sqrt{-1}\mathfrak{t}'$ に関する weight 分解）．

$$W = \oplus_i E(i), \quad \text{w.r.t } \mathrm{Ad}(T)$$

となる．これを $SU(2)$ の表現へ lift した場合の T に対する固有空間分解と考えると，

$$W = \oplus_i E(2i) \quad \text{w.r.t } T$$

となる．よって，$SO(3)$ の既約表現を $SU(2)$ へ lift したら，$S^{2k}(V)$ である．また，$S^{2k+1}(V)$ は $SO(3)$ の表現には落ちないのである．

Proposition 1.13. *$SO(3)$ の既約表現は $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ で分類される．各 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対応する既約表現は $S^{2k}(V)$ である．*

リー環レベルでは $\mathfrak{su}(2) \simeq \mathfrak{so}(3)$ であるので，$S^{2k+1}(V)$ はリー環 $\mathfrak{so}(3)$ の既約有限次元表現にはなる．しかし，$\mathfrak{su}(2) \simeq \mathfrak{so}(3)$ において，$H' = \frac{1}{2}H$ であるので，既約表現 $V = \mathbb{C}^2$ を考えると，

$$H'v_+ = \frac{1}{2}Hv_+ = \frac{1}{2}v_+, \quad H'v_- = -\frac{1}{2}v_-$$

となり，$\mathfrak{so}(3)$ に関して weight 分解させたときには，**weight は半整数**である．
そこで次のように述べることも可能である．

Proposition 1.14. *$\mathfrak{so}(3)$ の表現は，非負整数および非負半整数で分類される．$k/2$ に対して，$S^k(V)$ が対応する表現空間である（spin-$k/2$ 表現）．また整数の場合には，$SO(3)$ の表現になり，lift させれば $Spin(3) = SU(2)$ の表現になる．半整数の場合には，$Spin(3) = SU(2)$ の表現になるが $SO(3)$ の表現にはならない．$S^k(V)$ の（$\mathfrak{so}(3)$ に関する）highest weight は $k/2$ である．*

一般の特殊直交群のリー環 $\mathfrak{so}(n)$ の場合にも同様で，weight は整数か半整数である．そして半整数の場合には，$Spin(n)$ の表現となるが，$SO(n)$ の表現にはならない．このことを weight の integral 条件，half-integral 条件とよぶ．

1.6 $SU(3)$ の表現

$SU(3)$ の表現を考える．極大トーラス群は,

$$T = \{ \begin{pmatrix} e^{i2\pi a_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i2\pi a_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i2\pi a_3} \end{pmatrix} \mid a_1 + a_2 + a_3 = 0\} \simeq S^1 \times S^1$$

であり，対応するカルタン部分環（極大可換環）は,

$$\mathfrak{h} = \sqrt{-1}\{ \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} \mid a_1 + a_2 + a_3 = 0\}$$

となる．さらに,

$$\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} := \{ \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} \mid a_1 + a_2 + a_3 = 0\}$$

とする．

表現空間 V を $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ に関して同時固有空間分解（**weight 分解**）したときに，その同時固有値（weight）は $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ の元とみなせる．つまり,

$$V = \oplus E(\alpha), \quad \alpha \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$$

ここで，$H \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$，$v \in E(\alpha)$ に対して，$Hv = \alpha(H)v$．この $\alpha \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ が weight である．またその重複度を **weight の重複度**とよぶ．そこで,

$$\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^* = \mathbb{R}\{L_1, L_2, L_3\}/\{L_1 + L_2 + L_3 = 0\}, \quad L_i \left(\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} \right) = a_i$$

と書けば，表現の weight は

$$m_1 L_1 + m_2 L_2 + m_3 L_3, \quad m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{Z}$$

の形をしている（係数が整数であることは極大トーラス群 T に関する分解になっている必要があるので．integral 条件）．

$SU(3)$ のリー環を複素化した $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ への随伴表現を考えてみよう．weight 分解すれば,

$$\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}) = \mathfrak{h}_{\mathbb{C}} \oplus \bigoplus_{1 \leq i < j \leq 3} \mathbb{C}(E_{ij}) \oplus \bigoplus_{1 \leq i < j \leq 3} \mathbb{C}(E_{ji})$$

ここで E_{ij} は (i,j) 成分が 1 で他が零の行列である．この weight 分解を**ルート分解**とよび，固有値（weight）を**ルート**とよぶ．各ルートを計算すると，

$$[E_{kk}, E_{ij}] = \delta_{ki}E_{kj} - \delta_{jk}E_{ik} = \delta_{ki}E_{ij} - \delta_{jk}E_{ij} = (L_i - L_j)(E_{kk})E_{ij}$$

となるので，E_{ij} のルート（weight）は $L_i - L_j$ となることがわかる．

$$\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C}) = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{i<j} \mathfrak{g}_{L_i - L_j} \oplus \bigoplus_{i<j} \mathfrak{g}_{L_j - L_i}$$

$L_1 - L_2, L_2 - L_3, L_1 - L_3$ を**正ルート**とよび，$L_2 - L_1, L_3 - L_2, L_1 - L_3$ を**負ルート**とよぶ．**負ルートは正ルートのマイナス倍**となる．$\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ の行列表示したとき，対角成分が極大可換環で，上三角の部分が正ルートに，下三角が負ルートに対応している．

有限次元既約表現 V を考えて，weight 分解する．$V = \oplus E(\alpha)$．このとき $v \in E(\alpha)$，$X \in \mathfrak{g}_\beta$ とすれば，

$$HX(v) = XHv + [H,X]v = (\alpha + \beta)Xv$$

となる．$Xv \neq 0$ なら，Xv も weight vector であり，weight は $\alpha + \beta$ で与えられる．よって，既約表現 $V = \oplus E(\alpha)$ において，weight α と weight α' の差は $\{L_i - L_j\}_{i \neq j}$ の整数線形結合で与えれる．また，あるベクトルに E_{12}, E_{23}, E_{13} を適当にかけていけば，weight は上がっていくが，V が有限次元であることから，いつか必ず消える．よって，V 内の weight ベクトル v で $E_{12}v = E_{23}v = E_{13}v = 0$ となるものが存在する．これを **highest weight vector** とよび，weight を highest weight とよぶ．つまり，**正ルート空間の任意の元に対して消える vector を highest weight vector と定義する**のである．

また $SU(2)$ の場合と同様にして，highest weight vector v に $E_{21}, E_{31}, E_{3,2}$ を何度もかけていけば，V を復元できる．

さて，$[E_{ij}, E_{ji}] = E_{ii} - E_{jj}$（$1 \leq i < j \leq 3$）であり，

$$[E_{ii} - E_{jj}, E_{ij}] = 2E_{ij}, \quad [E_{ii} - E_{jj}, E_{ji}] = -2E_{ji}$$

となるので，$E_{ij} \to X$, $E_{ji} \to Y$, $E_{ii} - E_{jj} \to H$ とすれば，$E_{ij}, E_{ji}, E_{ii} - E_{jj}$（$1 \leq i < j \leq 3$）で張られる部分環 $\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ と同型である．そこで，この部分環へ表現を制限すれば，highest weight vector v は $E_{ij}v = 0$ であるので，$\mathfrak{p}$ に対しても highest vector となる．よって，ある非負の整数 k が存在して，$(E_{ii} - E_{jj})v = kv$ となる．

そこで，highet weight は，

$$(m_1L_1 + m_2L_2 + m_3L_3)(E_{ii} - E_{jj}) \geq 0, \quad 1 \leq i < j \leq 3$$

という条件を満たす．つまり $m_1 \geq m_2 \geq m_3$ である．これを **dominant 条件**とよぶ．また weight は整数であるので，

$$m_1 \geq m_2 \geq m_3, \quad m_i \in \mathbb{Z}$$

を dominant integral 条件とよぶ．

逆に dominant integral 条件を満たす (m_1, m_2, m_3) が与えられたとする．このとき一次元空間 $\mathbb{C}(v)$ を考えて，v への作用を $E_{12}v = E_{23}v = E_{13}v = 0$ かつ $Hv = (m_1L_1 + m_2L_2 + m_3L_3)(H)v$（$H \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{R}}$）と定める．さらに

$$Z(m_1, m_2, m_3) := \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{E_{21}^k E_{32}^l E_{31}^m v | k, l, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$$

というベクトル空間を考える．この空間はリー環の関係式を使って，自然に $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ の表現空間になる．そして極大不変部分空間 $Y(m_1, m_2, m_3)$ で割った Z/Y を考えると，これは既約表現空間で highest weight が $m_1L_1 + m_2L_2 + m_3L_3$ であることがわかる．

以上から，

Theorem 1.15. $SU(3)$ の有限次元既約表現は *dominant integral weight* である

$$(m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{Z}^3 \mod \mathbb{Z}(1,1,1), \quad m_1 \geq m_2 \geq m_3$$

で分類される．つまりこの *dominant integral weight* を *highest weight* にもつ既約表現が同値なものを除いて唯一つ存在する．

Remark 1.2. ここで $\mod \mathbb{Z}(1,1,1)$ となるのは，$\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^* = \mathbb{R}\{L_1, L_2, L_3\}/\{L_1 + L_2 + L_3 = 0\}$ であるから．

Example 1.8. $SU(3)$ の自然表現空間 $V = \mathbb{C}^3$ を考える．

$$V = E(L_1) \oplus E(L_2) \oplus E(L_3)$$

となる．$E(L_1) = \mathbb{C}\{(1,0,0)\}$ であるが，これが highest weight vector の空間になる．

一般の半単純コンパクト群の表現論も上と同様にすればよい．リー環を $\mathfrak{g}$ とする．このときカルタン部分環（極大可換環）$\mathfrak{h}$ を勝手に取り $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ に対して，$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ をルート分解する．ルートや weight がいる空間 $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^* \simeq \mathbb{R}^l$ に向きを入れる．つまり $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ を超平面で切って，一方を正，もう一方を負と定めるのである．ただし，超平面は weight が張る格子とは交わらないようにする．

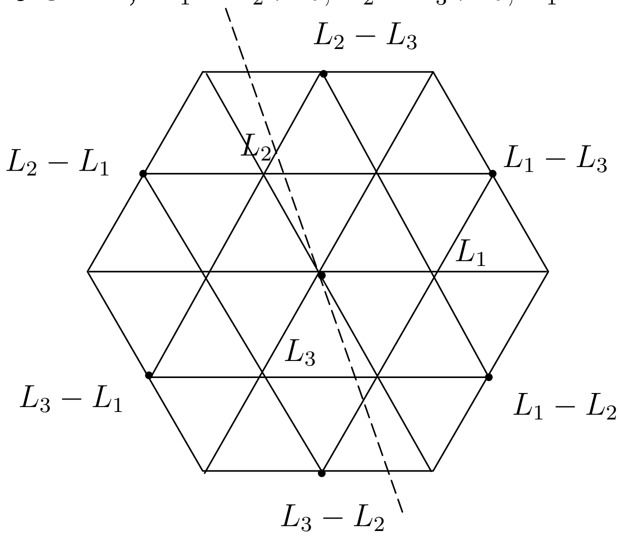
Example 1.9. $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ の場合に，

$$l(a_1L_1 + a_2L_2 + a_3L_3) = aa_1 + ba_2 + ca_3, \quad a + b + c = 0, a > b > c$$

として $l:\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^* \to \mathbb{R}$ を定めて，$l(\alpha)>0$ のときを $\alpha>0$, $l(\beta)<0$ のときを $\beta<0$ とする．また $\alpha>\beta$ とは $l(\alpha-\beta)>0$ のことである．すると，

$$l(L_1-L_2)=a-b>0,\quad l(L_2-L_3)=b-c>0,\quad l(L_1-L_3)=a-c>0$$

となるので，$L_1-L_2>0$, $L_2-L_3>0$, $L_1-L_3>0$ となる．



$\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ の場合には $L_1+L_2+L_3=0$ という条件があるのでわかりずらいが，$\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*\simeq\mathbb{R}^l$ としたときに，$\alpha=(\alpha^1,\cdots,\alpha^l)$ に対して，辞書式順序をいれたものと思えばよい．

そこで，ルートに対して正負が定まるので，リー環 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ は極大可換環，正ルート空間，負ルート空間の直和に分解できる．

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}=\mathfrak{g}_0\oplus\bigoplus_{\alpha}\mathfrak{g}_{\alpha}\oplus\bigoplus_{\alpha}\mathfrak{g}_{-\alpha},\quad \mathfrak{g}_0=\mathfrak{h}_{\mathbb{C}},\quad \alpha\in\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$$

となる．このとき，各ルートの重複度は1であり，α がルートとすれば，$-\alpha$ もルートになる．またルートが張る格子のランクは $\dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ となる．また $\mathfrak{g}_{\alpha},\mathfrak{g}_{-\alpha},[\mathfrak{g}_{\alpha},\mathfrak{g}_{-\alpha}]$ が張る空間は $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ と同型な部分環になる．

既約表現 W を考えて weight 分解する．$W=\oplus_{\beta}E(\beta)$（$\beta\in\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$）．このとき $X\in\mathfrak{g}_{\alpha}$（$\alpha$ は任意の正ルート）に対して，$Xv=0$ なる weight vector が存在する．これを **highest weight vector** とよぶ．**highest weight の重複度は** 1 である．つまり highest weight vector の weight 空間は 1 次元である（そうでないと既約性に反する）．$SU(3)$ の場合と同様に，$\mathfrak{g}_{\alpha},\mathfrak{g}_{-\alpha},[\mathfrak{g}_{\alpha},\mathfrak{g}_{-\alpha}]$ が張る部分環は $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ と同型であることから，dominant 条件を考えることができる．またリー群 G の表現へ lift するには integral 条件（場合によっては，half-integral 条件のような一般化した条件になる．G の基本群に関係する）を満たす．つまり，**highest weight は dominat integral 条件**を満たす．逆に，dominant integral 条件を満たすものに対して，それを highest weight にもつ既約表現空間が定まる．以上から，既約表現は dominant integral weight で分類されるのである．

また $(\pi, V), (\pi', V')$ を既約表現として，それぞれの highest weight を ρ, ρ'，highest weight vector を $v_\rho, v_{\rho'}$ とする．このとき $V \otimes V'$ というテンソル表現を考えたとき，$v_\rho \otimes v_{\rho'}$ は highest weight vector になり，highest weight は $\rho + \rho'$ であることが容易にわかる．つまり，$V \otimes V'$ 内に既約成分として highest weight $\rho + \rho'$ をもつものが存在する．もちろん，他の既約成分を求めることは，かなり大変な作業である（$SU(2)$ の場合はクレブッシュゴルダン定理でもとまる．一般には，それなりに公式が知られているが，実際に実行するのは面倒な作業である）．

このようにテンソル積表現を使って，一つの表現から，様々な既約表現を構成することができる．例えば，$Spin(n)$ の任意の既約表現は，スピノール表現と自然表現を何回もテンソル積した空間に実現できる．

2　スピンｃ群

向きつき４次元リーマン多様体はスピン構造が入るとは限らない（スピン構造については「スピン幾何入門３」で詳しく述べる）．しかし，スピンｃ構造は必ず入る．これをつかってサイバーグウィッテン理論は議論される．また，実 $2n$ 次元概エルミート多様体にもスピン構造は入るとは限らないが，スピンｃ構造は存在する．これらの利点は，スピン構造がなくてもスピンｃ構造があれば（複素）スピノール束が定義でき，ディラック作用素も定義できることにある．

そこでスピンｃ構造の構造群であるスピンｃ群について議論していこう．

2.1　スピンｃ群

スピンｃ群 $Spin^c(n)$ を定義しよう．

Definition 2.1. $\pm 1 \in Spin(n)$, $\pm 1 \in U(1)$ であることに注意して，

$$Spin^c(n) := (Spin(n) \times U(1))/\{\pm 1\}$$

としてリー群が定義できるこれを**スピンｃ群**という．

スピン群は実クリフォード代数の中で実現できた．**スピンｃ群の場合は複素クリフォード代数内で実現する**．

$Spin(n) \subset Cl_n$ であったが $U(1)$ 部分を $\mathbb{C}l_n = Cl_n \otimes \mathbb{C}$ の $1 \otimes \mathbb{C}$ の方に埋め込む．つまり

$$Spin^c(n) \ni [g, z] \mapsto g \otimes z \in Cl_n \otimes \mathbb{C}$$

という写像は well-defined である．実際 $g \otimes z = 1$ とすると $g = z^{-1}$ であり $Spin(n) \cap \mathbb{C} = \{\pm 1\}$ なので $g = z^{-1} = \pm 1$ となる．つまり $(g, z) = (1, 1)$ or $(g, z) = (-1, -1)$ となるので well-defined である．このようにして複素クリフォード代数内に $Spin^c(n)$

が実現できた．この意味で $Spin^c(n) := Spin(n) \otimes U(1)$ と書いたりもする．また $\mathbb{C} \subset \mathbb{C}l_n$ として，$Spin^c(n) \cap \mathbb{C} = U(1)$ である．

次のようにリー環から定義してもよい．

$$\mathfrak{spin}^c(n) := \mathfrak{spin}(n) \oplus \sqrt{-1}\mathbb{R} \subset \mathbb{C}l_n$$

として，

$$Spin^c(n) := \exp \mathfrak{spin}^c(n) \subset \mathbb{C}l_n$$

とすればよい（これが上の定義と一致することを確かめよ.「スピン幾何入門１」を参照せよ）

$Spin^c(n)$ に対するいくつかの事実を述べる. まず次のリー群の間の準同型が作れる.

$$\begin{gathered}
\mathrm{Ad} : Spin(n) \ni g \mapsto \mathrm{Ad}(g) \in SO(n), \\
\mathrm{Ad} : Spin^c(n) \ni [g, z] \mapsto \mathrm{Ad}(g) \in SO(n), \\
i : Spin(n) \ni g \to [g, 1] \in Spin^c(n), \\
j : U(1) \ni z \mapsto [1, z] \in Spin^c(n), \\
l : Spin^c(n) \ni [g, z] \mapsto z^2 \in U(1), \\
p = \mathrm{Ad} \times l : Spin^c(n) \ni [g, z] \mapsto (\mathrm{Ad}(g), z^2) \in SO(n) \times U(1).
\end{gathered}$$

（これらが well-defined な準同形であることを確かめよ）．p は２重被覆であることに注意.

このとき, **次は完全系列**

$$\begin{gathered}
1 \to Spin(n) \xrightarrow{i} Spin^c(n) \xrightarrow{l} U(1) \to 1 \\
1 \to U(1) \xrightarrow{j} Spin^c(n) \xrightarrow{\mathrm{Ad}} SO(n) \to 1
\end{gathered}$$

ここで２番目の式は $Spin(n)$ が $SO(n)$ の２重被覆であったように，$Spin^c(n)$ が $SO(n)$ の $U(1)$ ファイバー束（$U(1)$ 拡大）であることを言っている. この完全系列から次が成立

Lemma 2.1. *$n \geq 3$ として,*

1. *$\pi_1(Spin^c(n)) = \mathbb{Z}$ であり, $l_* : \pi_1(Spin^c(n)) \simeq \pi_1(U(1)) = \mathbb{Z}$*
2. *$\alpha \in \pi_1(Spin^c(n)) = \mathbb{Z}$, $\beta = -1 \in \pi_1(SO(n)) = \mathbb{Z}_2$, $\gamma \in \pi_1(U(1)) = \mathbb{Z}$ をそれぞれ生成元で, かつ $l_*(\alpha) = \gamma$ とする. このとき $p_* : \pi_1(Spin^c(n)) \to \pi_1(SO(n)) \times \pi_1(U(1))$ は $p_*(\alpha) = \beta + \gamma$ で与えられる.*

Proof. ホモトピー完全系列を使えばよい.

$$\to \pi_1(Spin(n)) \to \pi_1(Spin^c(n)) \to \pi_1(U(1)) \to \pi_0(Spin(n)) \to$$

となるので，最初の主張がいえる．つぎに $\alpha \in \pi_1(Spin^c(n)) = \mathbb{Z}$, $\beta \in \pi_1(SO(n)) = \mathbb{Z}_2$, $\gamma \in \pi_1(U(1)) = \mathbb{Z}$ をそれぞれ生成元で, かつ $l_*(\alpha) = \gamma$ とする．$\mathrm{Ad}_*(\alpha) = \beta$ であることを証明すればよい．$\pi_1(SO(n)) = \mathbb{Z}_2$ であるので $\mathrm{Ad}_*(\alpha) = 0$（$\in \mathbb{Z}_2$）として矛盾を導こう．ホモトピー完全系列

$$\to \pi_1(U(1)) \xrightarrow{j_*} \pi_1(Spin^c(n)) \xrightarrow{\mathrm{Ad}_*} \pi_1(SO(n)) \to \pi_0(U(1)) \to$$

を考えれば完全性から，ある $\delta \in \pi_1(U(1))$ が存在して，$j_*(\delta) = \alpha$ となる．そこで

$$\gamma = l_*(\alpha) = l_* j_*(\delta) = 2\delta \quad \text{in } \pi_1(U(1))$$

となる．これは γ が生成元であることに反するので矛盾. ■

上の補題は，$U(m)$ をスピン c 群に埋め込むときに用いる．

さて，後で議論するスピン c 構造のために，スピン c 群をより高い次元のスピン群に埋め込もう.

$$\mathbb{R}^n \ni e_i \mapsto e_i \in \mathbb{R}^{n+2}$$

を拡張して $Cl_n \subset Cl_{n+2}$ 及び $Spin(n) \subset Spin(n+2)$ を得る．$\mathfrak{spin}(n+2)$ の元 $e_{n+1}e_{n+2}$ をとり，$\exp e_{n+1}e_{n+2}t$ を $U(1)$ と見なす．つまり $(e_{n+1}e_{n+2})^2 = -1$ で e_ie_j（$1 \leq i < j \leq n$ とは可換なので $e_{n+1}e_{n+2}$ を $\sqrt{-1}$ と見なすのである. もちろん $U(1) \subset Spin(n+2)$ である．よって $(Spin(n) \times U(1))/\{\pm 1\} \subset Spin(n+2)$ を得る.

Lemma 2.2. このとき次の可換図式が成立.

$$\begin{array}{ccc} Spin^c(n) & \xrightarrow{f} & Spin(n+2) \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Ad}} \\ SO(n) \times U(1) = SO(n) \times SO(2) & \xrightarrow{i} & SO(n+2) \end{array} \tag{2.1}$$

ここで f は単射であることに注意.

Proof. 練習問題 ■

2.2 スピノール表現

Definition 2.2. $\mathbb{C}l_n$ の表現から $Spin^c(n)$ の表現 Δ_n をつくることができる. つまりスピノール空間 W_{2m+1} または $W_{2m}^{\pm}$ 上に

$$Spin^c(n) \times W \ni ([g,z],\phi) \mapsto \Delta([g,z])\phi = z\Delta(g)\phi = zg\phi \in W \tag{2.2}$$

として作用させる（well-defined を確かめよ）. これを**スピン c 群のスピノール表現**という.

さて $Spin(n)$ のスピノール表現はユニタリ表現であったので，$\Delta_n : Spin(n) \to U(W_n)$ となるが実はこの像は $SU(W_n)$ に入ることがわかる（$n \geq 3$）．

Proof. det をとれば, 準同型 $Spin(n) \to U(1)$ を得るが, $Spin(n)$ が単連結より準同型 $Spin(n) \to \mathbb{R}$ へ持ちあがり, $Spin(n)$ コンパクトなので像はコンパクトな $\mathbb{R}$ の部分群になるがこれは 0 のみ. よって $\det = 1$ である. ■

そこでスピン c 群の場合には

$$\det(\Delta_{2m+1}([g,z])) = z^{2^m} \quad \det(\Delta^{\pm}_{2m}([g,z])) = z^{2^{m-1}}$$

となる. **このように $Spin^c(n)$ のスピノール表現の det 表現は $U(1)$ の部分にのみ依存**する．また $z \in U(1)$ であるので，$Spin^c(n)$ のスピノール表現はユニタリ表現であることがわかる.

Remark 2.1. スピノール表現にはスピン群の作用と可換な実構造や四元数構造が入ったが, **スピン c 群の場合にはスピン c 群の作用と可換な構造は入らない**. これは $U(1)$ の作用が z 倍で作用しているので, 実構造，または四元数構造 $\mathfrak{J}$ があったとき $\mathfrak{J}([g,z] \cdot v) = [g,\bar{z}] \cdot \mathfrak{J}(v)$ となってしまうからである.

Remark 2.2. スピノール空間上には次のようにしても表現を定義することができる．$l = 2k+1$（$k \in \mathbb{Z}$）として，

$$Spin^c(n) \times W \ni ([g,z],\phi) \mapsto \Delta^l([g,z])\phi = z^l \Delta(g)\phi = z^l g\phi \in W$$

ここで，l は奇数でないと駄目．偶数の場合には，$Spin(n) \times U(1)$ の表現にはなるが，$Spin^c(n) = Spin(n) \times U(1)/\pm 1$ の表現に落ちない.（気持ちは，スピノール表現が $SO(n)$ の表現にならないことと同じこと）.

3 幾何構造とスピン群

今まではユークリッド空間からクリフォード代数を構成し，スピノール表現などを構成していった．このユークリッド空間にさらに幾何構造が入った場合には, その幾何構造はクリフォード代数やスピノール空間に反映する．特に考えるべきは，リーマン多様体のホロノミー群に対応してでてくる幾何構造である．単連結かつリーマン多様体として既約で対称空間でない場合のリーマンホロノミー群は $SO(n)$, $U(n)$, $SU(n)$, $Sp(n)$, $Sp(n)Sp(1)$, G_2, $Spin(7)$ のいずれかである.（単連結の仮定がない場合には制限ホロノミー群 $Hol_0(M,g) \subset Hol(M,g)$ が，上のようなホロノミー群をもつ．つまり局所的にはホロノミー群は上のいずれかである）.

この章では G_2, $Spin(7)$ 以外の場合の幾何構造とクリフォード代数について議論していこう.（G_2, $Spin(7)$ は特殊なので，別の機会（スピン幾何発展編？）で述べる）.

3.1　基本的な補題

次の被覆群の基本的な補題をよく使うので準備しておく.

Lemma 3.1 (リフトが存在するための必要十分条件). G, H はリー群で $\tilde{G}$ を G の**被覆群**とする．また H **は連結**と仮定する．ここで $\pi : \tilde{G} \to G$ が被覆．準同形写像 $f : H \to G$ が次の可換図式をみたす準同形 $F : H \to \tilde{G}$ へリフトするための必要十分条件は $f_*(\pi_1(H, e_H)) \subset \pi_*(\pi_1(\tilde{G}, e_{\tilde{G}}))$ となることである.

$$
\begin{array}{ccc}
 & & \tilde{G} \\
 & F \nearrow & \downarrow \pi \\
H & \xrightarrow{f} & G
\end{array}
$$

さらに，リフトは唯一つである.

Proof. 可換図式をみたすリフトが存在したら $f_*(\pi_1(H, e_H)) \subset \pi_*(\pi_1(\tilde{G}, e_{\tilde{G}}))$ をみたすことはあきらか．逆を証明する．$h \in H$ を単位元 e_H から道 ω でむすぶ．$f(\omega)$ は e_G と $f(h)$ をむすぶ道である．$\pi : \tilde{G} \to G$ は被覆なので，このリフトであり $e_{\tilde{G}}$ を始点とするものが唯一つ存在し，それを $\tilde{\omega}$ とする．そしてその終点を $F(h)$ と定める（ここで被覆であることからリフトは唯一つなのである）.

これが道のとり方によらないことを言えばよい．ω' を同様な道とする．$f(\omega')$ と $f(\omega^{-1})$ を結べば，ループ γ が定まる．つまり $f_*(\pi_1(H, e_H))$ の元 $[\gamma]$ が定まる．そこで仮定からあるループ $\tilde{\gamma}$ が存在して，$\pi_*[\tilde{\gamma}] = [\gamma]$ とかける．適当に動かせば，$\tilde{\gamma}$ が γ のリフトとなるが，リフトは唯一つなので $\tilde{\gamma}$ は $\tilde{\omega}$ と $\tilde{\omega'}$ を結んだものでなければならない．よってそれらの終点は一致するので定義した F は道のとり方よらない．F が唯一つであることもあきらか．あとは，群の準同形になることや写像の連続性を調べればよい.（詳しくは，位相幾何の本や，横田一郎「群と位相」などをみよ）. ■

Remark 3.1. H **が単連結なら，必ずリフトが存在**する．また H **が連結でない場合には，リフトは一つとは限らない**．例えば，$H = \tilde{G} = \mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$, $G = \{1\}$ の場合に，$f(\pm 1) = 1$ とする．このとき f のリフト F としては，$F(\pm 1) = \pm 1$ の場合と $F(\pm 1) = 1$ の場合が考えられる.

この補題は次のように使う．スピン構造については，後述.

Proposition 3.2 ([6]). (M, g) をリーマン多様体とする．このホロノミー群を $Hol(M) \subset SO(n)$ とする．さらに次の図式が可換となるような F が存在したとする（F が存在するかの判別が前補題）.

$$
\begin{array}{ccc}
 & & Spin(n) \\
 & F \nearrow & \downarrow \mathrm{Ad} \\
G = Hol(M, g) & \xrightarrow{i} & SO(n)
\end{array}
$$

このとき M はスピン構造をもつ．さらに M を連結としたとき，リフトが異なるならば，そのスピン構造も異なる．

Proof. スピン構造をもつことのみを証明しよう．$g_{ij}(x) \in G$ をフレーム束の推移関数とする．このとき $f_{ij} = F(g_{ij}) \in Spin(n)$ であり $f_{ij}f_{jk}f_{kl} = F(g_{ij}g_{jk}g_{kl}) = \mathrm{id}$ であるので f_{ij} は主 $Spin(n)$ 束の推移関数で，Ad で落とせば直交フレーム束の推移関数である．よってスピン構造は存在する．

一般には $g_{ij} \in SO(n)$ に対して，$\tilde{g}_{ij} \in Spin(n)$ のとり方は二つある．$\tilde{g}_{ij}\tilde{g}_{jk}\tilde{g}_{ki} = z_{ijk} \in \mathbb{Z}_2$ となってしまい，$[z_{ijk}] = w_2(M)$ である．命題のような可換図式があれば，$\tilde{g}_{ij}$ のとり方は標準的なものが一つとれて，$\tilde{g}_{ij}\tilde{g}_{jk}\tilde{g}_{ki} = \mathrm{id} \in \mathbb{Z}_2$ となるのである．

リフトが異なるときスピン構造も異なることについては省略（難しくないので練習問題．答えは [6] をみよ） ■

$Hol(M)$ が連結で上の可換図式が存在するなら，その幾何構造を保つスピン構造はただ一つである（幾何構造を保たないようなスピン構造が他にあってもかまわない）．もちろんホロノミー群が連結とならない多様体はたくさん存在する．

また $Hol(M)$ が連結かつ単連結なら必ず（幾何構造と可換な）スピン構造が唯一つ入る．

Example 3.1. $SU(n)$ 構造をもつ多様体（カラビヤウ多様体）に対して，$\pi_1(SU(n)) = 1$ から，**$SU(n)$ 構造をもつ多様体には自然なスピン構造が唯一つ存在する**．

G_2，$Spin(7)$ 多様体の場合には $\pi_1(G_2) = 1$, $\pi_1(Spin(7)) = 1$ であることを用いて自然な埋め込み $G_2 \to Spin(7)$, $Spin(7) \to Spin(8)$ が存在する．**つまり G_2 多様体，$Spin(7)$ 多様体には自然なスピン構造が存在する**．

Example 3.2. スピン c 構造についても同様である．例えば，$U(n)$ 構造を持つ多様体（ケーラー多様体）には，自然なスピン c 構造が存在する（後で詳しく述べる）．

3.2 エルミート構造と $U(n)$

ユニタリ群とその表現論について考える．リー群 $U(n)$ の定義は詳しく述べているが，多様体上の幾何構造を議論する際に必要となるためである．

3.2.1 ユニタリ群

ユークリッド空間に**エルミート構造**が入っている場合を考える．エルミート構造とは**複素構造 I で内積と compatible になるもの**である．すなわち実線形同型写像 I で，

$$I^2 = -1, \quad \langle Iv, Iw\rangle = \langle v, w\rangle, \quad \text{for } v, w \in \mathbb{R}^{2n}$$

この**エルミート構造を不変にする自己同型全体の群がユニタリ群 $U(n) \subset SO(2n)$ である**．

Definition 3.1.

$$U(n)=\{A\in SO(2n)\mid AI=AI\}=\{A\in GL(2n,\mathbb{R})|\langle Au,Av\rangle=\langle u,v\rangle,\ AI=IA\} \tag{3.1}$$

である．また

$$GL(n,\mathbb{C})=\{A\in GL(2n,\mathbb{R})\mid AI=AI\}$$

である．ここで I によりユークリッド空間に自然に向きが入ることに注意.

別の見方をする．$V=(\mathbb{R}^{2n},I)$ に対して，その複素化 $V\otimes\mathbb{C}$ を考える．これは複素線形で拡張した I に関して $\pm\sqrt{-1}$ 固有空間分解する．つまり $(1,0)$, $(0,1)$ 部分へ分解する，$V\otimes\mathbb{C}=V^{1,0}\oplus V^{0,1}$．さらに複素共役を考えれば，$\overline{V^{0,1}}=V^{1,0}$ である.

内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ を $V\otimes\mathbb{C}$ 上へ複素線形で複素内積として拡張しておく．このとき

$$h(u,v):=\langle u,\bar{v}\rangle$$

とすれば，$V\otimes\mathbb{C}$ にはエルミート内積が入り $V^{1,0}\perp_h V^{0,1}$ となる.

Proof. $u\in V^{1,0}$, $v\in V^{0,1}$ として $\bar{v}\in V^{1,0}$ であるので，

$$h(u,v)=\langle u,\bar{v}\rangle=\langle Iu,I\bar{v}\rangle=\sqrt{-1}^2\langle u,\bar{v}\rangle=-h(u,v)=0$$

となるので. ■

そこで，このエルミート内積を $V^{1,0},V^{0,1}$ へ制限することができ，$(V^{1,0},h)$, $(V^{0,1},h)$ というエルミート内積が入った複素ベクトル空間を得る．また，このエルミート内積は正定値である.

Proof. $v\in V^{1,0}$ として $h(v,v)=0$ とする．よって $\langle v,\bar{v}\rangle=0$ である.

$$\langle v+\bar{v},v+\bar{v}\rangle=\langle v,v\rangle+2\langle v,\bar{v}\rangle+\langle\bar{v},\bar{v}\rangle=\langle v,v\rangle+\langle\bar{v},\bar{v}\rangle=0$$

となる．ここで複素内積に対して $\langle v,v\rangle=\langle Iv,Iv\rangle=-\langle v,v\rangle=0$ であることを用いた．$v+\bar{v}\in V$ であり $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は V 上では正定値．よって上の式は $v+\bar{v}=0$ つまり $v=0=\bar{v}$ となる. ■

この**複素ベクトル空間** $(V^{1,0},h)$ **の自己同型全体でエルミート内積をたもつものとして** $U(n)\subset GL(n,\mathbb{C})$ **を定義**することができる.

Definition 3.2.

$$U(n):=\{A\in GL(V^{1,0})\mid h(Au,Av)=h(u,v)\} \tag{3.2}$$

この定義 3.2 による $U(n)$ と先ほどの定義 3.1 の $U(n)$ とは同型になる.

Proof. $A \in GL(V^{1,0})$ とする．$v \in V^{1,0}$ とすれば $v+\bar{v} \in V$ である．そこで $A\cdot(v+\bar{v}) = Av+\overline{Av}$ と定義すれば，$A \in GL(2n,\mathbb{R})$ とみなせる．実際，$\overline{Av+\overline{Av}} = Av+\overline{Av}$ であるので V の実線形変換を与える．そして

$$\begin{aligned} A\cdot(I(v+\bar{v})) &= A\cdot(\sqrt{-1}v+\overline{\sqrt{-1}v}) = \sqrt{-1}Av+\overline{A\sqrt{-1}v} = \sqrt{-1}Av-\sqrt{-1}\,\overline{Av} \\ &= IA\cdot(v+\bar{v}) \end{aligned}$$

となり I の作用と可換である．よって $GL(V^{1,0}) = GL(n,\mathbb{C})$ は $GL(2n,\mathbb{R})$ 内で I と可換な行列とみなせる．さらに内積を考えると，

$$\langle Av+\overline{Av}, Aw+\overline{Aw}\rangle = 2\langle Av,\overline{Aw}\rangle = 2h(Av,Aw)$$

となることから，$U(n)$ の定義 (3.1) と (3.2) は一致する． ■

Remark 3.2. 抽象的でわからりずらいという場合には, 上の対応は

$$GL(n,\mathbb{C}) \ni A+iB \mapsto \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \in GL(2n,\mathbb{R})$$

である．ただし複素構造は

$$I = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{id} \\ \mathrm{id} & 0 \end{pmatrix}$$

としている．

さて $\Lambda^{1,0} := (V^{1,0})^*$, $\Lambda^{0,1} := (V^{0,1})^*$ とする．エルミート内積によって

$$V^{1,0} \ni v \mapsto h(\cdot,\bar{v}) = \langle\cdot,v\rangle \in \Lambda^{0,1}$$

は**複素ベクトル空間として同型**になる．**同様に** $V^{0,1} \simeq \Lambda^{1,0}$ **である**.

Remark 3.3. $(1,0)$ と $(0,1)$ が入れ替わることに注意せよ．また，**これらの同型は** $U(n)$ **の表現空間としての同型**でもある．

V の正規直交基底として $e_1, e_2 = Je_1, \cdots, e_{2n-1}, e_{2n} = Je_{2n-1}$ となるものをとる．このとき

$$a_i^\dagger := \frac{\sqrt{-1}}{2}(e_{2i-1}-\sqrt{-1}Je_{2i-1}), \quad a_i := \frac{\sqrt{-1}}{2}(e_{2i-1}+\sqrt{-1}Je_{2i-1})$$

とすれば，$Ja_i^\dagger = \sqrt{-1}a_i^\dagger$，$Ja_i = -\sqrt{-1}a_i$ であるので

$$V^{1,0} = \mathbb{C}\{a_i^\dagger \mid 1 \le i \le n\}, \quad V^{0,1} = \mathbb{C}\{a_i \mid 1 \le i \le n\}$$

となる．複素共役は

$$\overline{a_i^\dagger} = -a_i, \quad \overline{a_i} = -a_i^\dagger$$

であり，エルミート内積は

$$h(a_i^\dagger, a_j^\dagger) = \delta_{ij}/2, \quad h(a_i,a_j) = \delta_{ij}/2, \quad h(a_i^\dagger, a_j) = 0$$

となる．

Remark 3.4. ここで $a_i^\dagger$ を $\frac{1}{2}(e_{2i-1}-\sqrt{-1}Je_{2i-1})$ としないのは，クリフォード関係式として $a_i^\dagger a_j + a_j a_i^\dagger = \delta_{ij}$ を採用したいだけの理由であり，深い意味はない．

また，同型 $V^{1,0} \simeq \Lambda^{0,1}$ を考えれば

$$\Lambda^{0,1} = \mathbb{C}\{a_i^\dagger \mid 1 \leq i \leq n\}, \quad \Lambda^{1,0} = \mathbb{C}\{a_i \mid 1 \leq i \leq n\}$$

となる．

Remark 3.5. ユニタリ基底は $\sqrt{2}a_i^\dagger$ である．$\sqrt{2}a_i^\dagger \in V^{1,0}$ の双対基底は $h(\cdot, \bar{\sqrt{2}}a_i^\dagger) = -\sqrt{2}h(\cdot, a_i)$ であるので $-\sqrt{2}a_i \in V^{0,1} = \Lambda^{1,0}$ である．これはちょっと気持ち悪いが，仕方がない．マイナス倍が嫌な場合には $a_i^\dagger$ として $\frac{1}{2}(e_{2i-1}-\sqrt{-1}Je_{2i-1})$ を採用すればよい．

3.2.2　$U(n)$ のリー環と表現論

Definition 3.3. $V^{1,0} \otimes \Lambda^{1,0} = V^{1,0} \otimes V^{0,1} \simeq \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ である．まず $V^{1,0}$ の**ユニタリ基底**を ϵ_i とする．つまり

$$\epsilon_i := \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{2i-1} - \sqrt{-1}Je_{2i-1}) = -\sqrt{-1}\sqrt{2}a_i^\dagger$$

その共役を

$$\bar{\epsilon}_i := \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{2i-1} + \sqrt{-1}Je_{2i-1}) = -\sqrt{-1}\sqrt{2}a_i$$

これは $V^{1,0} \simeq \Lambda^{0,1} \simeq V^{0,1}$ により ϵ_i の双対基底であることに注意する．

そこでリー環 $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ の基底として

$$\epsilon_i \otimes \bar{\epsilon}_j = \epsilon_i \otimes (\epsilon_j)^* = -2a_i^\dagger \otimes a_j \quad 1 \leq i, j \leq n$$

をとることができる．これが行列 E_{ij} に対応している．そこで $V^{1,0}$ への作用は定義から

$$\epsilon_i \otimes \bar{\epsilon}_j(\epsilon_k) = \delta_{kj}\epsilon_i$$

となる．そしてリー環の積は

$$[\epsilon_i \otimes \bar{\epsilon}_j, \epsilon_k \otimes \bar{\epsilon}_l] = \bar{\epsilon}_j(\epsilon_k)\epsilon_i \otimes \bar{\epsilon}_j - \bar{\epsilon}_l(\epsilon_i)\epsilon_k \otimes \bar{\epsilon}_j = \delta_{jk}\epsilon_i \otimes \bar{\epsilon}_j - \delta_{il}\epsilon_k \otimes \bar{\epsilon}_j$$
$$([E_{ij}, E_{kl}] = \delta_{jk}E_{ij} - \delta_{il}E_{kj})$$

Remark 3.6. 物理の記号でかけば $|i\rangle\langle j|k\rangle = \delta_{jk}|i\rangle$ などと書く．行列の積は $|i\rangle\langle j|k\rangle\langle l| = \delta_{jk}|i\rangle\langle l|$ となる．

また $\mathfrak{u}(n)$ は $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ の実部であるが，このときの実構造は

$$\sum z_{ij}\epsilon_i \otimes \bar{\epsilon}_j \mapsto -\sum \overline{z}_{ij}\epsilon_j \otimes \bar{\epsilon}_i$$

である．よって $\mathfrak{u}(n)$ の基底としては

$$\sqrt{-1}\epsilon_i \otimes \bar{\epsilon}_i, \quad 1 \le i \le n, \quad \sqrt{-1}(\epsilon_i \otimes \bar{\epsilon}_j + \epsilon_j \otimes \bar{\epsilon}_i), \quad \epsilon_i \otimes \bar{\epsilon}_j - \epsilon_j \otimes \bar{\epsilon}_i, \quad 1 \le i < j \le n.$$

さらに $\mathfrak{u}(n)$ のカルタン部分環（極大可換環）として，$\mathbb{R}\{\sqrt{-1}\epsilon_i \otimes \bar{\epsilon}_i\}_i$ をとることが出来る．そこで

$$\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} := \mathbb{R}\{\epsilon_i \otimes \bar{\epsilon}_i \mid 1 \le i \le n\} \subset \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$$

を考える．

$U(n)$ の有限次元ユニタリ表現があったときに，この $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ に対して表現空間を同時固有空間に分解する．これを **weight 空間分解**とよぶ．そのときの同時固有値 $\lambda = (\lambda^1, \cdots, \lambda^n)$ を **weight** とよぶ．ここで λ^i が $\epsilon_i \otimes \bar{\epsilon}_i$ の固有値である（$\lambda^i \in \mathbb{Z}$ となる）．特に既約表現を考えた場合には，この weight を**辞書式順序**でならべたら **highest weight** ρ **が唯一つ定まる**．この既約表現の highest weight は次の **dominant integral 条件をみたす**.

$$\rho = (\rho^1, \cdots, \rho^n) \in \mathbb{Z}^n, \quad \rho^1 \ge \rho^2 \cdots \ge \rho^n$$

逆に，**この条件を満たす highest weight をもつ既約表現空間が同値なものを除いて唯一つ作れる**（詳しくは大島・小林「リー群とリー環」をみよ）．また $U(n)$ の複素化 $GL(n,\mathbb{C})$ を考えると，$U(n)$ のユニタリ表現と $GL(n,\mathbb{C})$ の正則表現とが一対一に対応する（Weyl のユニタリトリック）．

そこで，**highest weight が** ρ **となる既約表現を** (π_ρ, V_ρ) **と書く**ことにする．π_ρ が表現で，V_ρ が表現空間のこと．

ルート分解も書いておこう．

$$\begin{aligned}\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) =& \mathfrak{h}_{\mathbb{C}} \oplus \bigoplus_{i<j} \mathbb{C}(\epsilon_i \otimes \bar{\epsilon}_j) \oplus \bigoplus_{i<j} \mathbb{C}(\epsilon_j \otimes \bar{\epsilon}_i) \\ =& \bigoplus_i \mathbb{C}(E_{ii}) \oplus \bigoplus_{i<j} \mathbb{C}(E_{ij}) \oplus \bigoplus_{i<j} \mathbb{C}(E_{ji})\end{aligned}$$

となる．

3.2.3 表現の具体例

Definition 3.4. weight $\lambda = (\lambda^1, \cdots, \lambda^n)$ を書くときに，k が j 個並んだものを k_j と書くことにする．例えば,

$$(0_{i-1}, 1, 0_{n-i}) = (\underbrace{0, \cdots, 0}_{i-1}, 1, \underbrace{0, \cdots, 0}_{n-i})$$

Example 3.3 (自然表現). $V^{1,0}$ への自然表現を考える. 表現空間は $\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{a_i^\dagger | i = 1, \cdots, n\} = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{\epsilon_i | i = 1, \cdots, n\}$ である．$a_1^\dagger$（または ϵ_1）が highest weight vector であり highest weight は $(1, 0_{n-1})$ である．実際,

$$\epsilon_i \otimes \bar{\epsilon}_i(\epsilon_1) = \delta_{i1}\epsilon_i$$

であるので，$\epsilon_i \otimes \bar{\epsilon}_i$ に対する固有値は $i = 1$ なら 1 で，$i \neq 1$ なら零である．よって，weight は $(1, 0, \cdots, 0)$ となる．また,

$$\epsilon_i \otimes \bar{\epsilon}_j(\epsilon_1) = \delta_{1j}\epsilon_i = 0, \quad 1 \leq i < j \leq n$$

であるので，正ルート空間の作用に対して消える．以上から ϵ_1 は highest weight vector である．同様に $a_i^\dagger$ の weight は $(0_{i-1}, 1, 0_{n-i})$ である．そこで，weights を辞書式順序で並べたら．

$$(1, 0, \cdots, 0) > (0, 1, 0, \cdots, 0) > \cdots > (0, \cdots, 0, 1)$$

となるので，highest weight は $(1, 0_{n-1})$ となる．また lowest weight は $(0_{n-1}, 1)$ である.

Example 3.4 (自然表現の共役表現). 自然表現の共役表現を考える. 表現空間は $\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{a_i | i = 1, \cdots, n\}$ である. a_i の weight は $(0_{i-1}, -1, 0_{n-i})$ である. よって highest weight は $(0_{n-1}, -1)$ であり highest weight vector は a_n となる.

Example 3.5 ($(0,p)$-form). 表現空間 $\Lambda^p V^{(1,0)} = \Lambda^{0,p}$ を考えテンソル積表現で作用させる．実は，これは既約になることがわかる．このときの highest weight は $(1_p, 0_{n-p})$ であり, その highest weight vector は $a_1^\dagger \wedge \cdots \wedge a_p^\dagger$ である.

Example 3.6 (det 表現). 上の例からわかるように det 表現 $(\det, \Lambda^{0,n})$ の highest weight は (1_n) である. また $\det^k$ 表現の highest weight は (k_n) である.

Example 3.7 ($(p,0)$-form). 表現空間 $\Lambda^p V^{(0,1)} = \Lambda^{p,0}$ の場合を考える．これも既約表現である．highest weight は $(0_{n-p}, (-1)_p)$ である. さらに $\Lambda^{p,0} \otimes \Lambda^{0,n}$ という表現空間を考えると．この表現の highest weight は

$$(0_{n-p}, (-1)_p) + (1_n) = (1_{n-p}, 0_p)$$

となり，$\Lambda^{p,0} \otimes \Lambda^{0,n} \simeq \Lambda^{0,n-p}$ という表現空間の間の同型が成立する.

Example 3.8 (対称テンソル積表現). 自然表現の対称 k 回テンソル積の場合を考える. これも既約表現. highest weight は $(k, 0_{n-1})$ で weight vector $\odot^k a_1^\dagger$ である.

Example 3.9 (随伴表現). $U(n)$ の $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ への adjiont 表現を考える．これは既約表現ではない. まず $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ の恒等写像が張る 1 次元ベクトル空間 $\mathbb{C}\{I\}$ 上に自明に作用する. のこりの部分は既約であり highest weight は $(1, 0_{n-2}, -1)$ である. よっ

て $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ は $V_{(0_n)} \oplus V_{(1,0_{n-2},-1)}$ と既約分解される. つまり $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) = \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) \oplus$ tracepart となっている.

別の見方をしてみる．$\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) = V^{(1,0)} \otimes \Lambda^{1,0} = \Lambda^{0,1} \otimes \Lambda^{1,0} = \Lambda^{1,1}$ である．この $\Lambda^{1,1}$ の中には次のような $U(n)$ の作用で不変な二次形式が存在する．

$$\Omega = 2\sqrt{-1}\sum a_i^\dagger \wedge a_i = -\sqrt{-1}\sum \epsilon_i \wedge \bar{\epsilon}_i = \sum_{i=1}^{n} e_{2i-1} \wedge e_{2i}$$

である．これは $\overline{\Omega} = \Omega$ であるので実 $(1,1)$ 形式であり，いわゆるケーラー形式である．これが自明表現の基底である．つまり

$$\Lambda^{1,1} = \Lambda_0^{1,1} \oplus \Omega\Lambda^{0,0}$$

ここで $\Lambda_0^{1,1}$ は **primitive** $(1,1)$ 形式といい highest weight$(1,0_{n-2},-1)$ をもつ既約表現空間である．

より一般に

$$\Lambda^{p,q} = \Lambda^{p,0} \otimes \Lambda^{0,q}$$

としたとき，この表現空間を既約分解するときにも Ω をつかえばよい．$\Omega^*\Omega$ という作用素を考えるとこれは $\Lambda^{p,q}$ に作用する．さらに $U(n)$ 不変な元である．よって，$\Lambda^{p,q}$ を既約分解したときに，既約成分へは定数で作用する（**シューアの補題**）．いわゆるカシミール作用素であるので既約分解に定数で作用するのである．このカシミール作用素に対する固有空間分解が既約分解になる．例えば，小林昭七「複素幾何１，２」を見よ．

Remark 3.7. 表現 W が既約かどうかを判定する方法：まず，highest weight vector を見つける．その highest weight を ρ とすれば，$V_\rho \subset W$ である．V_ρ の次元は**ワイルの次元公式**から計算できる．そこで $\dim V_\rho = \dim W$ であるなら，$V_\rho = W$ であり，W は既約表現であることがわかる．

Remark 3.8. 上であげた例からわかるように, 既約表現 (π_ρ, V_ρ) が与えられたとき, その共役表現（conjugate representation）or 転置表現（contragradient representation）の weight の集合はもとの weight 集合の (-1) 倍である. とくに highest weight はもとの表現の lowest weight の (-1) 倍である．さて highest weight へのワイル群の作用により lowest weight へ移すことができる（weight diagram を考えよ. また, この元は postive root の集合を negative root の集合に移すただ一つのものである）．今回の場合はワイル群が対称群であるので, highest weight の順序を逆にしたものが lowest weight である. よって,

Proposition 3.3. ***highest weight*** $\rho = (\rho^1, \cdots, \rho^n)$ **をもつ既約表現** (π_ρ, V_ρ) **の共役表現の** ***highest weight*** **は**

$$(-\rho^n, -\rho^{n-1}, \cdots, -\rho^1)$$

である．

Remark 3.9. 既約表現 (π_ρ, V_ρ) に det 表現をテンソルすることにより highest weight が $\rho + k(1_n)$ の既約表現空間を得ることができる．$SU(n)$ へ制限すれば (1_n) は自明表現である，そこで

$$\{\rho \mod \mathbb{Z}(1_n) \mid \rho \text{ は dominant integral 条件をみたす}\}$$

という集合で $SU(n)$ の既約表現は分類される．**このようにして $SU(n)$ の表現と $U(n)$ の表現の対応がわかる**.

大島小林「リー群とリー環」（第二巻３７５ページ）の方法なら．

$$\hat{\rho}^i = \rho^i - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \rho^j$$

として，

$$\begin{aligned}
&\hat{\rho}^1 \geq \hat{\rho}^2 \geq \cdots \geq \hat{\rho}^n \\
&\hat{\rho}^i - \hat{\rho}^j \in \mathbb{Z} \\
&\hat{\rho}^1 + \hat{\rho}^2 + \cdots + \hat{\rho}^n = 0
\end{aligned}$$

となるもので既約表現は parametrize される．

3.2.4 スピン群と $U(n)$

さて，次のようなことを考える．下の可換図式をみたす F は存在するであろうか?

$$\begin{array}{ccc}
 & & Spin(2n) \\
 & F \nearrow & \downarrow \mathrm{Ad} \\
U(n) & \xrightarrow{i} & SO(2n)
\end{array}$$

このようなリフトは実は存在しないことがわかる．以下でそれを証明する．

Lemma 3.4. $\pi_1(SO(n)) = \mathbb{Z}_2$（$n \geq 3$）, $\pi_1(SO(2)) = \mathbb{Z}$ であったが，**この基本群の生成元として，次の形のものが取れる**.

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Proof. $n = 2$ のときは，明らかであろう．$n \geq 3$ のときを考える．

$$1 \to \mathbb{Z}_2 \to Spin(n) \to SO(n) \to 1$$

という完全系列からホモトピー完全系列をえる．

$$\to 0 \to \pi_1(Spin(n)) = 0 \to \pi_1(SO(n)) \xrightarrow{\partial} \pi_0(\mathbb{Z}_2) \to 0 \to$$

を得る．この ∂ という写像は $\gamma \in \pi_1(SO(n))$ を $Spin(n)$ へリフトして，その終点（これは $\mathbb{Z}_2$ の ± 1 のいずれか）を対応させる写像である．そこで今の場合には $\gamma(t)$ のリフトは $\tilde{\gamma}(t) = \cos t/2 + e_1 e_2 \sin t/2$ であるので，終点は -1 である．そこで上の完全系列を考えれば $\gamma(t)$ が $\pi_1(SO(n)) \simeq \mathbb{Z}_2$ の生成元を与える． ■

さて G を群として N を正規部分群，H を部分群とする．$G = NH$, $N \cap H = \{e\}$ のとき G は N と H の**半直積**であるという（集合としては $N \times H$ であるけど，積は直積群としいれたものではない．正規部分群とは $gNg^{-1} \subset N$ であった．積は $(nh)(n'h') = (nhn'h^{-1})(hh')$ として入るのである）．ユニタリ群は次のように半直積で書ける．

Lemma 3.5. $U(n) = SU(n)U(1)$ と半直積の形にかける．特に位相空間として $U(n) \simeq U(1) \times SU(n)$ であるので $\pi_1(U(n)) = \mathbb{Z}$ **である．この生成元は次である**

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Proof. $SU(n)$ は $U(n)$ の正規部分群である．また $U(1)$ を $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$ として $U(n)$ の部分群とみなす．このとき $SU(n) \cap U(1) = \{e\}$ である．つまり，

$$U(n) \ni A \mapsto A \begin{pmatrix} \det A^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \det A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \in SU(n)U(1)$$

とすればよい． ■

Proposition 3.6. 下の可換図式をみたす，リフト F は**存在しない**

$$\begin{array}{ccc} & & Spin(2n) \\ & F \nearrow & \downarrow \mathrm{Ad} \\ U(n) & \xrightarrow{i} & SO(2n) \end{array}$$

Proof. $\pi_1(U(n))$ の生成元をとり $U(n) \subset SO(2n)$ を考えると，

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

となる．つまり $i_*(\pi_1(U(n)) = \mathbb{Z}_2$ となる．一方 $\mathrm{Ad}_*(\pi_1(Spin(2n))) = 0$ である．よって補題 3.1 からリフトは存在しない． ■

次の系の証明はスピン構造の議論をした後にする．

Corollary 3.7. 一般に概エルミート多様体にはスピン構造は存在するとは限らない．

概エルミート多様体には一般にスピン構造は存在しないことがわかったが，実はスピン c 構造は必ず存在する．それをみるには，$U(n)$ から $Spin^c(2n)$ へのリフトがあればよいのである．以下でそれを議論しよう．

3.2.5　スピン c 群と $U(n)$

スピン c 群はスピン群の $U(1)$ 拡大であり，**被覆群ではないので，実はリフトは存在するけど一つとは限らない**．実際，リフトのとり方はいろいろある．我々は標準的なリフトをつくるため次の図式を考えることにする．

$$\begin{array}{ccc} & & Spin^c(2n) \\ & & \downarrow p = \mathrm{Ad} \times l \\ U(n) \ni A & \xrightarrow{i \times \det} & (A, \det A) \in SO(2n) \times U(1) \end{array}$$

ここで $Spin^c(2n)$ は $SO(n) \times U(1)$ の被覆群であることに注意.

Proposition 3.8. 下の可換図式をみたすリフト F が**唯一つ存在する**.

$$\begin{array}{ccc} & & Spin^c(2n) \\ & F \nearrow & \downarrow p = \mathrm{Ad} \times l \\ U(n) & \xrightarrow{f = i \times \det} & SO(2n) \times U(1) \end{array}$$

さらに F は単射である．**つまり** $U(n) \subset Spin^c(2n)$ **である**.

Proof. δ を $\pi_1(U(n))$ の生成元とし，α, β, γ を $\pi_1(Spin^c(2n)), \pi_1(SO(2n)), \pi_1(U(1))$ の生成元で $l_*(\alpha) = \gamma$ とする，このとき以前示したように $p_*(\alpha) = \beta + \gamma$ である．一方で $f_*(\delta) = \beta + \gamma$ であることもすぐわかる．よって $f_*(\pi_1(U(n))) \subset p_*(\pi_1(Spin^c(2n))$ であるので上の図式を可換にするリフトは唯一つ存在する.

F が単射であることをしめそう．$f = p \circ F$ であるので，$f = i \times \det$ が単射ならよい．そこで i は単射なので f も単射．よって F は単射.　■

Remark 3.10. この命題から概エルミート多様体には必ずスピン c 構造が存在することがわかる．詳しくは後で.

より一般には

$$f^k : U(n) \ni A \mapsto (A, (\det A)^{2k+1}) \in SO(2n) \times U(1), \quad k \in \mathbb{Z}$$

を考えると，$f^k_*(\delta) = \beta + (2k+1)\gamma = (2k+1)\beta + (2k+1)\gamma$ であるので，$f^k_*(\pi_1(U(n))) \subset p_*(\pi_1(Spin^c(2n))$ となり**各 $k \in \mathbb{Z}$ に対して下の可換図式をみたすリフトが存在する**ことがわかる.

$$\begin{array}{ccc} & & Spin^c(2n) \\ & F^k \nearrow & \downarrow p = \mathrm{Ad} \times l \\ U(n) & \xrightarrow{f^k} & SO(2n) \times U(1) \end{array}$$

この意味で $U(n)$ から $Spin^c(2n)$ へのリフトは一つとは限らない.

3.2.6 スピン群と $SU(n)$

さて，$SU(n)$ の場合も考えてみよう．$SU(n)$ **の場合には標準的に** $Spin(2n)$ **へ埋め込める**.（$SU(n)$ 構造に対応する幾何は，カラビヤウ or リッチフラットケーラーなどである）.

Proposition 3.9. 下の可換図式をみたす，リフト F は存在する．

$$\begin{array}{ccc} & & Spin(2n) \\ & F \nearrow & \downarrow \mathrm{Ad} \\ SU(n) & \xrightarrow{i} & SO(2n) \end{array}$$

また $Spin(2n) \to Spin^c(2n)$ により $SU(n)$ は自然に $Spin^c(2n)$ へも埋め込める．

3.2.7 スピンｃ群と $U(n)$：具体的に

さて以下では，クリフォード代数を使って，具体的に $U(n)$ から $Spin^c(2n)$ への埋め込みを与えよう．まず $\mathfrak{u}(n)$ の $\mathbb{R}$ 上基底としては

$$\sqrt{-1}\epsilon_i \otimes \bar{\epsilon}_i, \quad 1 \le i \le n, \quad \sqrt{-1}(\epsilon_i \otimes \bar{\epsilon}_j + \epsilon_j \otimes \bar{\epsilon}_i), \quad \epsilon_i \otimes \bar{\epsilon}_j - \epsilon_j \otimes \bar{\epsilon}_i, \quad 1 \le i < j \le n$$

がとれた．これをクリフォード代数に埋め込むには，そのままテンソル積のところをクリフォード積に変えればよい．つまり

$$\begin{aligned} \sqrt{-1}\epsilon_i \otimes \bar{\epsilon}_i &\mapsto \sqrt{-1}a_i^\dagger a_i = \frac{1}{2}e_{2i-1}e_{2i} + \frac{1}{2}\sqrt{-1} \in \mathbb{C}l_{2n} \\ \sqrt{-1}(\epsilon_i \otimes \bar{\epsilon}_j + \epsilon_j \otimes \bar{\epsilon}_i) &\mapsto \sqrt{-1}(a_i^\dagger a_j + a_j^\dagger a_i) \in Cl_{2n} \\ \epsilon_i \otimes \bar{\epsilon}_j - \epsilon_j \otimes \bar{\epsilon}_i &\mapsto a_i^\dagger a_j - a_j^\dagger a_i \in Cl_{2n} \end{aligned}$$

ここで注意すべきは $\sqrt{-1}a_i^\dagger a_i = \frac{1}{2}e_{2i-1}e_{2i} + \frac{1}{2}\sqrt{-1}$ であるので $\mathfrak{u}(n)$ は**複素クリフォード代数の中で実現される**ことである．

Remark 3.11. $a_i^\dagger \otimes a_i$ を $a_i^\dagger a_i$ に対応させてもよいが，自然表現を考えたときに定数倍ずれてしまうので，上のような対応のさせ方をしている．どちらにしろ，リー環として同型であるので問題ない．

複素化を考えれば $\mathfrak{u}(n) \otimes \mathbb{C} \simeq \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ も複素クリフォード代数内に埋め込める．つまり

$$\epsilon_i \otimes \bar{\epsilon}_j \mapsto a_i^\dagger a_j.$$

とする．

Lemma 3.10. 上で定義したものはリー環の同型写像になる．もちろんクリフォード代数内でのリー括弧は $[a, b] = ab - ba$ でいれる．**よって** $\mathfrak{u}(n) \subset \mathbb{C}l_{2n}$ **とみなす**.

Proof. 演習問題 ■

さて，上の埋め込みで $\mathfrak{u}(n) \subset \mathbb{C}l_{2n}$ とみなしたとき

$$G := \exp \mathfrak{u}(n) \subset Spin^c(2n)$$

を考える．

Proposition 3.11. このとき $G \simeq U(n)$ である．**つまり** $U(n)$ **から** $Spin^c(2n)$ **への埋め込こみを与える**．さらに，これは *Propostion 3.8* の意味で標準的な埋め込みとなる．

Proof. まず $V^{1,0} \subset \mathbb{C}l_{2n}$ とみなして随伴作用を考える．

$$[a_i^\dagger a_j, a_k^\dagger] = a_i^\dagger a_j a_k^\dagger - a_k^\dagger a_i^\dagger a_j = \delta_{jk} a_i^\dagger$$

などにより，

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}l_{2n} \supset G & \xrightarrow{\mathrm{Ad}} & U(n) \\ {\scriptstyle \exp}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \exp} \\ \mathbb{C}l_{2n} \supset \mathfrak{u}(n) & \xrightarrow{\mathrm{ad}} & \mathfrak{u}(n) \end{array}$$

という図式をえる．ここで ad は同型写像である．また $\mathrm{Ad}(\exp X) = \exp \mathrm{ad}(X)$ が成立する．ad は明らかに同型でる．また $U(n)$ は連結コンパクト群であるので，$\forall g' \in U(n)$ は $g' = \exp X'$（$\exists X' \in \mathfrak{u}(n)$）とかけるので，Ad は全射である．よってリー環が同型なので Ad はある被覆を与える．これが単射であることを証明しよう．

$\mathrm{Ad}(\exp X) = \mathrm{id}$ つまり $(\exp X) a_k^\dagger (\exp(-X)) = a_k^\dagger$ がすべての k について成り立つとする．また $\exp X = \exp Y \exp it \in G \subset Spin^c(2n) = Spin(2n) \otimes U(1)$ の形にしおく．

$$\mathrm{Ad}(\exp X) a_k^\dagger = (\exp Y \exp it) a_k^\dagger (\exp -it \exp -Y) = (\exp Y) a_k^\dagger (\exp -Y) = a_k^\dagger$$

となる．$(\exp Y) a_k^\dagger (\exp -Y) = a_k^\dagger$ において複素共役をとれば，$(\exp Y) a_k (\exp -Y) = a_k$ をえるので，$\exp Y \in Spin(2n)$ はクリフォード代数の中心元である．そして $Spin(2n)$ に入るので $\exp Y = \pm 1$ である．よって $\mathrm{Ad}(\exp X) = \mathrm{id}$ なら

$$\exp X = 1 \otimes \exp it = 1 \otimes \lambda \in Spin(2n) \otimes U(1)$$

の形と仮定してよい．

そこで，証明すべきことは，

さて，一般にコンパクトリー群において極大可換環を $\mathfrak{t}$ とすると $T = \exp \mathfrak{t}$ が極大トーラスになり，$G = \cup_{g \in G} \mathrm{Ad}(g) T$ となる．我々は極大可換環として $\mathbb{R}\{\sqrt{-1} a_i^\dagger a_i\}_i$ がとれるので，これを exp したものを極大トーラス T とする．そこで $\lambda = \exp X = gtg^{-1}$（$t \in T$）とすると，$\lambda$ はすべての元と可換なので，$t = \lambda$ である．よって，$t = \lambda \in T$ であるので

$$t = (\cos\theta_1 + \sin\theta_1 e_1 e_2) \cdots (\cos\theta_n + \sin\theta_n e_{2n-1} e_{2n}) e^{\sqrt{-1}(\theta_1 + \cdots + \theta_n)}$$

となる．これがスカラーになるためには，$\theta_1 = m_1\pi, \theta_2 = m_2\pi, \ldots, \theta_n = m_n\pi$ となる必要がある．そのとき，

$$t = (-1)^{m_1+\cdots+m_n} e^{\sqrt{-1}(m_1+\cdots+m_n)\pi} = (-1)^{2(m_1+\cdots+m_n)} = 1$$

となる．よって $\lambda = 1$ となる．すなわち $\mathrm{Ad}(\exp X) = \mathrm{id}$ なら $\exp X = \mathrm{id}$ となるので，単射である．

次に，標準的な写像であることを見てみよう．つまり $G = U(n) \to Spin^c(2n) \to SO(2n) \times U(1)$ が $i \times \det : U(n) \to SO(2n) \times U(1)$ という写像を与えることを証明すればよい．$U(n)$ の Ad 作用をリー環レベルでみると

$$[a_i^\dagger a_j, a_k^\dagger] = a_i^\dagger a_j a_k^\dagger - a_k^\dagger a_i^\dagger a_j = \delta_{jk} a_i^\dagger$$

であるので，$i : U(n) \to SO(2n)$ を与えている．det について考える（$\det \exp X = \exp \mathrm{tr} X$ を思い出せ）．$\sqrt{-1}\epsilon_i \otimes \bar{\epsilon}_i \in \mathfrak{u}(n)$ のトレースは

$$\sqrt{-1}\epsilon_i \otimes \bar{\epsilon}_i(a_k^\dagger) = \sqrt{-1}\delta_{ik} a_i^\dagger$$

であるので $\sqrt{-1}$ である．さて一方，

$$\mathfrak{u}(n) \ni \sqrt{-1}\epsilon_i \otimes \bar{\epsilon}_i \mapsto \sqrt{-1} a_i^\dagger a_i \mapsto \frac{1}{2} e_{2i-1} e_{2i} + \frac{\sqrt{-1}}{2} \xrightarrow{z \to z^2} \sqrt{-1} \in \mathfrak{u}(1)$$

となる．よって $U(n) \to Spin^c(2n) \to SO(2n) \times U(1)$ が $i \times \det : U(n) \to SO(2n) \times U(1)$ と一致する．またこのようなものは一つしかないのであった．よって標準的な写像である．■

Remark 3.12. $\mathfrak{u}(n) \subset \mathfrak{spin}(2n)$ とすることができる．つまり $\sqrt{-1}\epsilon_i \otimes \bar{\epsilon}_i$ に $\sqrt{-1} a_i^\dagger a_i - \sqrt{-1}/2 = \frac{1}{2} e_{2i-1} e_{2i}$ を対応させるのである．このようにした場合には，上の証明の途中まではうまく行く（全射まではわかる）が，最後のところで $t = \pm 1$ となる．実際 $-1 \in \exp \mathfrak{u}(n)$ となる．つまり $\mathrm{Ad} : G \to U(n)$ は $U(n)$ の二重被覆を与えることになる．実際，この対応で考えると

$$\exp t a_1^\dagger a_1 = \cos t/2 + e_1 e_2 \sin t/2 \xrightarrow{\mathrm{Ad}} \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

であるので二周してしまう．我々が考えるのは $U(n) \subset SO(2n)$ を導くようなものでなければならないのであった．標準的な写像では，

$$\exp t a_1^\dagger a_1 = (\cos t/2 + e_1 e_2 \sin t/2) e^{t\sqrt{-1}/2} \xrightarrow{\mathrm{Ad}} \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

となる．

Remark 3.13. より一般の $F^k : U(n) \to Spin^c(2n)$ をあたえるには $\sqrt{-1}\epsilon_i \otimes \bar{\epsilon}_i$ に対して，$\frac{1}{2} e_{2i-1} e_{2i} + (2k+1)\sqrt{-1}/2$ を対応させればよい．

3.2.8 $SU(n)$ と $Spin(2n)$：具体的に

$SU(n)$ の $Spin(2n)$ への埋め込みも同様にすればよい．まず $\mathfrak{su}(n)$ の $\mathbb{R}$ 上基底としては

$$\sqrt{-1}(\epsilon_i\otimes\bar{\epsilon}_i-\epsilon_n\otimes\bar{\epsilon}_n),\quad 1\le i\le n-1,\quad \sqrt{-1}(\epsilon_i\otimes\bar{\epsilon}_j+\epsilon_j\otimes\bar{\epsilon}_i),\quad \epsilon_i\otimes\bar{\epsilon}_j-\epsilon_j\otimes\bar{\epsilon}_i,\quad 1\le i<j\le n$$

がとれる．そこで，これをクリフォード代数に埋め込むには，

$$\sqrt{-1}\sqrt{-1}(\epsilon_i\otimes\bar{\epsilon}_i-\epsilon_n\otimes\bar{\epsilon}_n)\mapsto\sqrt{-1}(a_i^\dagger a_i-a_n^\dagger a_n)=\frac{1}{2}e_{2i-1}e_{2i}-\frac{1}{2}e_{2n-1}e_{2n}$$
$$\sqrt{-1}(\epsilon_i\otimes\bar{\epsilon}_j+\epsilon_j\otimes\bar{\epsilon}_i)\mapsto\sqrt{-1}(a_i^\dagger a_j+a_j^\dagger a_i)$$
$$\epsilon_i\otimes\bar{\epsilon}_j-\epsilon_j\otimes\bar{\epsilon}_i\mapsto a_i^\dagger a_j-a_j^\dagger a_i$$

とすればよい．**注意すべきは $\mathfrak{su}(n)$ は実クリフォード代数の中で実現される**ことである．つまり $\exp\mathfrak{su}(n)\subset Spin(2n)$ となる．前と同様の議論をすれば $SU(n)=\exp\mathfrak{su}(n)$ となる．

3.2.9 スピノール表現

$Spin^c(2n)$ のスピノール表現を $U(n)$ へ制限したときにどうなるかについて議論しよう．まずスピノール表現のフォック空間表示を思い出す．

$$a_{k_1}^\dagger a_{k_2}^\dagger\cdots a_{k_j}^\dagger|vac\rangle,\quad 1\le k_1<k_2<\cdots<k_j\le n,\ j=0,1,\cdots,n$$

が基底であった．今の場合には，このスピノール表現を $Spin^c(2n)$ の表現とみなすことにする．これが，$U(n)$ の表現と見たとき $\oplus\Lambda^{0,p}$ と表現空間として同値であることを見たい．すでに $U(n)$ を $\mathbb{C}l_{2n}$ へ埋め込んでいるので，リー環レベルでみれば十分であろう．

これを分解するには数作用素またはケーラー形式を使うのがよい．**数作用素**とは粒子の数を数えるものであった．

$$N=\sum a_i^\dagger a_i$$

Remark 3.14. ケーラー形式を使う場合は注意が必要．$\Omega=2\sqrt{-1}\sum a_i^\dagger\wedge a_i$ であった．これをクリフォード代数内で書くなら．

$$\Omega=\sum_i e_{2i-1}e_{2i}=2\sqrt{-1}\sum_i(a_i^\dagger a_i-1/2)=2\sqrt{-1}(N-n/2)$$

としなければ実クリフォード代数に入らない．スピノール表現へもこの形で作用させる．

数作用素 N は $\mathfrak{u}(n)$ と可換である．つまり

$$[\mathfrak{u}(n), \Omega] = 0$$

つまり**カシミール元と呼ばれる不変元であり，これは既約成分へ定数で作用する**（シューアの補題）．そのため既約分解に使える．言い換えるとカシミール元に対する固有値分解が表現の不変部分空間への分解になっている．スピノール表現の場合には粒子が p 個あれば $N = p$ で作用する．よって

$$W^p := \mathbb{C}\{a^\dagger_{k_1} a^\dagger_{k_2} \cdots a^\dagger_{k_p} |vac\rangle, \mid 1 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_p \leq n\}$$

とすれば，これは $\mathfrak{u}(n)$ の作用に関して不変部分空間である．この wight をもとめよう．$a^\dagger_i a_i$ の作用をみればよい．これは粒子 $a^\dagger_i$ が入っていれば 1 で作用し，ないなら零で作用する．よって wight は

$$(0, \ldots, 0, 1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0, 1 \ldots)$$

の形である．つまり 1 を p 個，0 を $n - p$ 個ならべたものである．そこで highest weight は

$$(1_p, 0_{n-p}) = (1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$$

であり highest weight vector は $a^\dagger_1 a^\dagger_2 \cdots a^\dagger_p |vac\rangle$ である．また次元を勘定すれば，これが既約表現空間 $\Lambda^{0,p}$ と等しいことがわかる．以上から

Proposition 3.12. **スピノール空間は $U(n)$ の表現空間とみなしたとき $\oplus_{p=0}^n \Lambda^{0,p}$ と既約分解される．**

Remark 3.15. **数作用素 N は第一カシミール元** c_1 という．一般の highest weight $\rho = (\rho^1, \cdots, \rho^n)$ をもつ既約表現に対しては，$\pi_\rho(c_1) = \sum_i \rho^i$ という定数で作用する．上では $\sum_{i=0}^p 1 = p$ で作用している．

具体的には次のようにする．スピノール空間 W と $\Lambda^{0,p}$ を次のようにして同一視する．

$$a^\dagger_{i_1} \cdots a^\dagger_{i_l} |vac\rangle \mapsto 2^{\frac{l}{2}} a^\dagger_{i_1} \wedge \cdots \wedge a^\dagger_{i_l}$$

これは内積も保つこともわかる（$\sqrt{2}$ の項があるのは $h(a^\dagger_i, a^\dagger_j) = \delta_{ij}/2$ のため）．W 上に作用するクリフォード積を $\Lambda^{0,p}$ 上に作用させてみよう．

$$a^\dagger_i \mapsto \sqrt{2} a^\dagger_i \wedge,$$
$$a_i \mapsto \sqrt{2} i(a^\dagger_i)$$

とすれば $\oplus \Lambda^{0,p}$ にクリフォード代数が作用する．ここで $i(a^\dagger_i)$ の定義は

$$i(a^\dagger_i)(a^\dagger_{i_1} \wedge \cdots \wedge a^\dagger_{i_l}) = \sum (-1)^{k-1} h(a^\dagger_{i_k}, a^\dagger_i) a^\dagger_{i_1} \wedge \cdots \widehat{a^\dagger_{i_k}} \cdots \wedge a^\dagger_{i_l}$$

注意すべきは $\sqrt{-1} a_i \mapsto \sqrt{-1}\sqrt{2} i(a^\dagger_i)$ となること. これは $i(\cdot)$ は複素歪線形であるが, $a_i \mapsto a^\dagger_i$ も複素歪線形であるので, 合わせて複素線形になるからである. 以上からクリフォード代数の表現空間として W と $\oplus \Lambda^{0,p}$ は同型である.

Remark 3.16. 以上の作用はつぎのように書き直せる.

$$e_i\cdot \mapsto -\sqrt{2}\sqrt{-1}(a_{i\wedge}^\dagger + i(a_i^\dagger))$$
$$Je_i\cdot \mapsto \sqrt{2}(a_i^\dagger - i(a_i^\dagger))$$

Remark 3.17. この分解はドルボーディラック作用素のときに用いるものである.

3.2.10 スピノール表現 2

かなり無理やりなことを行ってみる. リー群としては $U(n)\subset Spin(2n)$ にはならないが, リー環レベルでみれば $\mathfrak{u}(n)\subset \mathfrak{spin}(2n)$ とできるのであった. つまり

$$\sqrt{-1}\epsilon_i\otimes\bar{\epsilon}_i \mapsto \sqrt{-1}a_i^\dagger a_i - \sqrt{-1}/2$$

と対応させる. これをスピノール表現に作用させることによりリー環 $\mathfrak{u}(n)$ の表現を得ることができる. このとき

$$W^p := \mathbb{C}\{a_{k_1}^\dagger a_{k_2}^\dagger \cdots a_{k_p}^\dagger |vac\rangle, \mid 1\le k_1 < k_2 < \cdots < k_p \le n\}$$

は既約表現空間となるが, highest weight は

$$((1/2)_p, (-1/2)_{n-p})$$

である. つまり dominant integral 条件の dominant 条件は満たすが, integral 条件はみたさない.

Remark 3.18. integral 条件は $U(n)$ の場合には $\mathfrak{u}(n)$ の表現が $U(n)$ 表現へと持ち上がるための条件である. もちろん上のような highest weight をもつ表現は $U(n)$ の表現とはならない.

Remark 3.19. 半単純リー環の有限次元既約 highest weight 表現は integral 条件を満たすことが知られているが $\mathfrak{u}(n)$ は半単純でないので, 上のような表現を考えることができる.

さらに, 次のような $\mathfrak{u}(n)$ の表現を考える. 一次元複素ベクトル空間 $\mathbb{C}$ 上で

$$\epsilon_i\otimes\bar{\epsilon}_i \mapsto \frac{1}{2}\mathrm{id} \quad i=1,\cdots,n$$

として他の元は零で対応させる. これも $\mathfrak{u}(n)$ の表現になり, highest weight は $((1/2)_n)$ である. つまり, ある意味で $(\det)^{1/2}$ 表現を考えていると思えばよい. または $\sqrt{\Lambda^{0,n}} = \sqrt{\Lambda^{n,0}}^{-1}$ 空間への表現とみなす. そこでテンソル積 $W^p\otimes\sqrt{\Lambda^{n,0}}^{-1}$ を考えると highest weight が $(1_p, 0_{n-p})$ の既約表現空間となり $\Lambda^{0,p}$ と同型になる.

Proposition 3.13. $\mathfrak{u}(n)$ の表現空間として次の同型が成立する．

$$W^p \simeq \Lambda^{0,p} \otimes \sqrt{\Lambda^{n,0}}, \quad W \simeq \oplus_{p=0}^n (\Lambda^{0,p} \otimes \sqrt{\Lambda^{n,0}})$$

また次の同型も成立する．

$$\overline{W^p} \simeq W^{n-p}$$

Proof. 2番目の主張を証明しよう．$\overline{W^p}$ とは W^p の共役表現または双対表現のことである．

$$\overline{W^p} = \overline{\Lambda^{0,p} \otimes \sqrt{\Lambda^{n,0}}} = \Lambda^{p,0} \otimes \Lambda^{0,n} \otimes \sqrt{\Lambda^{n,0}} = \Lambda^{0,n-p} \otimes \sqrt{\Lambda^{n,0}} = W^{n-p}$$

■

Remark 3.20. ケーラースピン多様体上でスピン構造からくるスピノール束を作った場合，スピノール束 $\mathbf{S}$ は次のように分解される．

$$\mathbf{S} = \oplus \mathbf{S}^p = \oplus(\Lambda^{0,p}(M) \otimes \sqrt{K})$$

ここで K は標準直線束というもので $\Lambda^{n,0}(M)$ のことである．この分解の fiber ごとでみたものが上の命題である．そして $\overline{\mathbf{S}^p} = \mathbf{S}^{n-p}$ となる．

$SU(n)$ の表現 $\Lambda^{n,0}$ および $\Lambda^{0,n}$ は自明表現と同値である．そこで

Proposition 3.14. $SU(n)$ の表現空間として次の同型が成立する．

$$W^p \simeq \Lambda^{0,p}, \quad \overline{\Lambda^{0,p}} = \Lambda^{p,0} = \Lambda^{0,n-p}$$

Proof. 二番目の主張は今までの議論から明らかであるが，証明しておこう．そのためには $U(n)$ の表現から $SU(n)$ の表現への作り方を思い出せばよい．$\Lambda^{0,n-p}$ の $U(n)$ の表現としての highest weight は $(1_{n-p}, 0_p)$ であった．そこで $SU(n)$ の表現空間としての highest weight は $(1_{n-p}, 0_p) \mod \mathbb{Z}(1_n)$ である．一方 $\Lambda^{p,0}$ の $U(n)$ の表現としての highest weight は $(0_{n-p}, (-1)_p)$ である．$(0_{n-p}, (-1)_p) + (1_n)$ を考えば $SU(n)$ の表現としての highest weight が $(1_{n-p}, 0_{p-1}) \mod \mathbb{Z}(1_n)$ となることがわかる． ■

3.3 四元数エルミート構造と $Sp(n)$

前 subsection ではエルミート構造が入っている場合について述べた．この subsection ではエルミート構造にさらに四元数構造を課した場合を考える．

3.3.1　シンプレクティック群 $Sp(n)$

$(\mathbb{R}^{4n}, \langle\cdot,\cdot\rangle, I, J, K)$ を**四元数エルミート構造**をもつベクトル空間とする．つまり $4n$ 次元実ベクトル空間で正定値内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ および内積と compatible な実線形写像 I, J, K で $I^2 = J^2 = -1$, $IJ = -JI = K$ をみたすものが入っているものである．このとき

$$Sp(n) := \{A \in SO(4n, \mathbb{R}) | AI = IA, AJ = JA, AK = KA\} \subset U(2n) \subset SO(4n)$$

とする．これを**シンプレクティック群**とよぶ（シンプレクティック幾何での $Sp(n, \mathbb{R})$ のことではない．どちらも $Sp(n, \mathbb{C})$ に実形であるが）．

Remark 3.21. 四元数構造を定義するには $I^2 = J^2 = -1, IJ = -JI$ だけあれば十分である．K は $K = IJ$ とすればよい．以下で見るように $(\mathbb{R}^{4n}, I)$ を複素ベクトル空間とみなしたとき J は四元数構造に対応する．つまり J は歪複素線形（$JI = -JI$）かつ $J^2 = -1$ をみたすもの．

このリー群を表示するには四元数ベクトル空間を用いたり，複素ベクトル空間をもちいたりする．我々はもっとも便利と思われる，複素ベクトル空間を用いた $Sp(n)$ の表示を考えよう．$(V = \mathbb{R}^{4n}, \langle\cdot,\cdot\rangle, I, J, K)$ を複素化し $V \otimes \mathbb{C}$ として，I, J, K および内積をすべて複素線形に拡張する．複素構造 I についてこれを分解し $V^{1,0} \oplus V^{0,1}$ とする．$V^{1,0}, V^{0,1}$ にはエルミート内積 h が入るのであった．$JI = -IJ$ であるので $J : V^{1,0} \to V^{0,1}$, $J : V^{0,1} \to V^{1,0}$ である．また $\overline{V^{0,1}} = V^{1,0}$ であった．そこで

$$\mathfrak{J} : V^{1,0} \ni u \mapsto J(\bar{u}) \in V^{1,0}$$

とすれば，歪複素線形であり，$\mathfrak{J}^2 = -1$, $h(\mathfrak{J}u, \mathfrak{J}v) = h(v, u)$ をみたす．

Proof. 歪複素線形は明らかである．J は複素線形に拡張したので $u = v \otimes z \in V \otimes \mathbb{C}$ とすれば $J(v \otimes z) = (Jv) \otimes z$．よって $\overline{J(u)} = J(\bar{u})$ となる．そこで $\mathfrak{J}^2(u) = J(\overline{J(\bar{u})}) = J^2(u) = -u$ となる．つまり $\mathfrak{J}^2 = -1$ である．
つぎに

$$h(\mathfrak{J}u, \mathfrak{J}v) = \langle J(\bar{u}), \overline{J(\bar{v})}\rangle = \langle J(\bar{u}), J(v)\rangle = \langle \bar{u}, v\rangle = \langle v, \bar{u}\rangle = h(v, u)$$

が成立する．

■

このように $(V^{1,0}, h)$ には**エルミート内積と compatible な四元数構造 $\mathfrak{J}$ が入る**．
さらに

$$\sigma(u, v) := -h(u, \mathfrak{J}v)$$

とすれば，これは $V^{1,0}$ **上の複素シンプレクティック形式**である．そして

$$\sigma(u, v) = \overline{\sigma(\mathfrak{J}u, \mathfrak{J}v)}, \quad \sigma(v, \mathfrak{J}v) > 0 \quad \forall v \neq 0 \tag{3.3}$$

Proof. まず定義から複素線形であることはよい．さらに $\sigma(u,v) = -h(u,\mathfrak{J}v) = -h(\mathfrak{J}\mathfrak{J}v,\mathfrak{J}u) = h(v,\mathfrak{J}u) = -\sigma(v,u)$ であるので交代形式である．また

$$\overline{\sigma(\mathfrak{J}u,\mathfrak{J}v)} = \overline{h(\mathfrak{J}u,v)} = h(v,\mathfrak{J}u) = -\sigma(v,u) = \sigma(u,v)$$

さらに,

$$\sigma(v,\mathfrak{J}v) = -h(v,\mathfrak{J}\mathfrak{J}v) = h(v,v) > 0, \quad \forall v \neq 0$$

である．またこのとこから非退化もわかる． ■

Remark 3.22. 四元数エルミート構造とは複素ベクトル空間に四元数構造 $\mathfrak{J}$ と上の (3.3) をみたす複素シンプレクティック構造が入ってるものと定義してもよい．実際，このときに $h(u,v) := \sigma(u,\mathfrak{J}v)$ とすれば，エルミート内積で $\mathfrak{J}$ と compatible なものが定まる．同様にして $\sigma,\mathfrak{J},h$ のうち二つ（compatible として）が定まれば，もう一つが定まる．

$V^{1,0}$ のエルミート内積により $\Lambda^{0,1}$ が同型になった．一方，シンプレクティック形式により $V^{1,0}$ と $\Lambda^{1,0}$ は同型になる．これらをつかって

$$V^{1,0} \simeq V^{0,1} \simeq \Lambda^{1,0} \simeq \Lambda^{0,1}$$

となる（これらの同型は $Sp(n)$ の表現空間としての同型でもある）．

さてシンプレクティック群を定義しよう．

$$\begin{aligned} Sp(n) :&= \{A \in GL(2n,\mathbb{C}) \mid \mathfrak{J}A = A\mathfrak{J},\ h(Au,Av) = h(u,v)\} \\ &= \{A \in GL(2n,\mathbb{C}) \mid \mathfrak{J}A = A\mathfrak{J},\ \sigma(Au,Av) = \sigma(u,v)\} \\ &= \{A \in GL(2n,\mathbb{C}) \mid h(Au,Av) = h(u,v),\ \sigma(Au,Av) = \sigma(u,v)\} \\ Sp(n,\mathbb{C}) &= \{A \in GL(2n,\mathbb{C}) \mid \sigma(Au,Av) = \sigma(u,v)\} \end{aligned}$$

とする．特に $Sp(n,\mathbb{C}) \cap U(2n) = Sp(n)$ である．

$(V^{1,0},\mathfrak{J},h)$ **を以下では** E **と書く**．この複素ベクトル空間 E には**シンプレクティックユニタリ基底**がとれる．つまりシンプレクティック基底かつユニタリ基底である．我々はその基底を

$$\epsilon_\alpha, \quad \alpha = -n, -(n-1), \cdots, -1, 1, 2, \cdots n$$

とすれば

$$\sigma(\epsilon_\alpha,\epsilon_\beta) = \mathrm{sign}(\alpha)\delta_{\alpha,-\beta}, \quad h(\epsilon_\alpha,\epsilon_\beta) = \delta_{\alpha,\beta}$$

をみたすものである．このとき $\mathfrak{J}(\epsilon_\alpha) = \mathrm{sign}(\alpha)\epsilon_{-\alpha}$ となることに注意.

3.3.2 $Sp(n)$ の表現論

E を $2n$ 次元複素ベクトル空間で四元数構造と compatible なエルミート内積が入っているものとする．またシンプレクティックユニタリ基底を $\{\epsilon_\alpha\}_\alpha$ とする．

複素シンプレクティックリー環の基底を書いてみよう．

$$x_{\alpha\beta} := \epsilon_\alpha \otimes \epsilon_\beta^* - \mathrm{sign}(\alpha\beta)\epsilon_{-\beta} \otimes \epsilon_{-\alpha}^* \in E \otimes E^*, \quad \alpha+\beta \geq 0 \tag{3.4}$$

を考えると，これは複素シンプレクティック構造 σ をたもち，次元は $2n^2+n$ であるので，$\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$ の基底である．つまり

$$\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C}) = \mathbb{C}\{x_{\alpha\beta} \mid \alpha+\beta \geq 0, \alpha, \beta = \pm 1, \cdots, \pm n\}.$$

このときのリー環の積は，$\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ の時と同様にして

$$[x_{\alpha\beta}, x_{\mu\nu}] = \delta_{\beta\mu}x_{\alpha\nu} - \delta_{\alpha\nu}x_{\mu\beta} + \mathrm{sign}(\alpha\beta)(\delta_{-\beta\nu}x_{\mu-\alpha} - \delta_{-\alpha\mu}x_{-\beta\nu}).$$

また E への作用は

$$x_{\alpha\beta}\epsilon_\gamma = \delta_{\beta\gamma}\epsilon_\alpha - \mathrm{sign}(\alpha\beta)\delta_{-\alpha\gamma}\epsilon_{-\beta}$$

となる．$x_{\alpha\beta}$ の定義を $\alpha+\beta \geq 0$ に限らず，すべての α, β に対して (3.4) のように定義すれば

$$x_{\alpha\beta} = -\mathrm{sign}(\alpha\beta)x_{-\beta-\alpha}$$

をみたす．

また $\Lambda^{1,0} \simeq V^{1,0}$ の対応は $\epsilon_\alpha^* = \Omega(\cdot, \epsilon_\alpha) \mapsto -\mathrm{sign}(\alpha)\epsilon_{-\alpha}$ であるので，

$$x_{\alpha\beta} = \epsilon_\alpha \otimes \epsilon_\beta^* - \mathrm{sign}(\alpha\beta)\epsilon_{-\beta} \otimes \epsilon_{-\alpha}^* = -\mathrm{sign}(\beta)\epsilon_\alpha \otimes \epsilon_{-\beta} - \mathrm{sign}(\beta)\epsilon_{-\beta} \otimes \epsilon_\alpha = -\mathrm{sign}(\beta)\epsilon_\alpha \odot \epsilon_{-\beta}$$

となる．**つまり $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$ は２次対称テンソル積空間と同一視できる**．

$$\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C}) = S^2(E).$$

このように表示したときの E への作用は

$$\epsilon_\alpha \odot \epsilon_\beta(\epsilon_\gamma) = \sigma(\epsilon_\alpha, \epsilon_\gamma)\epsilon_\beta + \sigma(\epsilon_\beta, \epsilon_\gamma)\epsilon_\alpha$$

である．

次に $\mathfrak{sp}(n)$ の基底を書いてみよう．E には四元数構造 $\mathfrak{J}$ が入っていた．そこで $S^2(E) \subset E \otimes E$ には実構造 $\mathfrak{J} \otimes \mathfrak{J}$ が入る．この実構造で不変なものが $\mathfrak{sp}(n) \subset \mathfrak{sp}(n,\mathbb{C}) = S^2(E)$ となる．$\mathfrak{J} \otimes \mathfrak{J}(\epsilon_\alpha \odot \epsilon_\beta) = \mathrm{sign}(\alpha\beta)\epsilon_{-\alpha} \odot \epsilon_{-\beta}$ であるので，実構造に関して不変のものは

$$\begin{cases} \epsilon_\alpha \odot \epsilon_\beta + \mathrm{sign}(\alpha\beta)\epsilon_{-\alpha} \odot \epsilon_{-\beta} \\ \sqrt{-1}(\epsilon_\alpha \odot \epsilon_\beta - \mathrm{sign}(\alpha\beta)\epsilon_{-\alpha} \odot \epsilon_{-\beta}) \end{cases}$$

である．または $\mathfrak{sp}(n)=\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})\cap\mathfrak{u}(2n)$ を考慮すれば

$$\begin{cases} x_{\alpha\beta}-x_{\beta\alpha} \\ \sqrt{-1}(x_{\alpha\beta}+x_{\beta\alpha}) \end{cases}$$

となる．

よって

$$\mathfrak{sp}(n)=\mathbb{R}\{x_{\alpha\beta}-x_{\beta\alpha}\,|\,\alpha+\beta\geq 0,\ \alpha>\beta\}\cup\mathbb{R}\{\sqrt{-1}(x_{\alpha\beta}+x_{\beta\alpha})\,|\,\alpha+\beta\geq 0,\ \alpha\geq\beta\}$$

となる．

$\mathfrak{sp}(n)$ のカルタン部分環として

$$\sqrt{-1}\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}:=\mathbb{R}\{\sqrt{-1}x_{\alpha\alpha}\,|\,\alpha\geq 0\}$$

をとることができるので，

$$\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}:=\mathbb{R}\{x_{ii}\,|\,i=1,\cdots,n\}$$

とする．

以下では $Sp(n)$ の表現論の概略を述べよう．表現の weight 分解をするには，この $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ に関して同時固有分解をすればよい．(V,π) を $Sp(n)$ の有限次元ユニタリ表現とする．これを $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ に関して同時固有分解する，$V=\oplus V(\lambda)$．その同時固有値を $\lambda=(\lambda^1,\cdots,\lambda^n)$ と書き weight とよぶ．ここで λ^i は x_{ii} の固有値である．既約表現を考えたとき辞書式順序で weight を並べて，もっとも大きい weight ρ が唯一つ定まりそれを highest weight とよぶ．この highest weight は

$$\rho=(\rho^1,\cdots,\rho^n)\in\mathbb{Z}^n,\quad \rho^1\geq\rho^2\geq\cdots\rho^1\geq 0$$

という **dominant integral 条件**をみたす．逆に，この条件をみたす ρ に対して，それを highest weight にもつ既約ユニタリ表現を構成できる．そこで我々は highest weight ρ をもつ既約表現空間を V_ρ と書き表現を π_ρ と書く．

ルート分解を書いておこう．

$$[x_{ii},x_{\alpha\beta}]=(\delta_{\alpha,i}+\delta_{-\beta,i}-\delta_{\beta,i}-\delta_{-\alpha,i})x_{\alpha\beta}$$

であるので，正ルートに対応するものは，

$$\{x_{k,-l}\,|\,1\leq k\leq l\leq n\}\cup\{x_{k,l}\,|\,1\leq k<l\leq n\}$$

となる．$x_{k,-l}$ のルートは

$$(0,\cdots,0,\underbrace{1}_{k},0,\cdots,0,\underbrace{1}_{l},0,\cdots,0)\quad(1\leq k\leq l\leq n)$$

であり，$x_{k,l}$ のルート

$$(0,\cdots,0,\underbrace{1}_{k},0,\cdots,0,\underbrace{-1}_{l},0,\cdots,0)\quad(1\leq k<l\leq n)$$

Example 3.10. 自然表現 E は $(1, 0_{n-1})$ という highest weight をもつ．$\epsilon_{\pm i}$ の weight は $(0_{i-1}, \pm 1, 0_{n-i})$ である．

ϵ_1 が highest weight vector であることを確かめる．

$$x_{k,-l}(\epsilon_1) = \delta_{-l,1}\epsilon_k + \delta_{-k,1}\epsilon_l = 0, \quad (1 \le k \le l \le n)$$
$$x_{kl}(\epsilon_1) = \delta_{l1}\epsilon_k - \delta_{-k,1}\epsilon_{-l} = 0 \quad (1 \le k < l \le n)$$
$$x_{ii}(\epsilon_1) = \delta_{i1}\epsilon_i - \delta_{-i,1}\epsilon_{-i} = \delta_{i1}\epsilon_1$$

となるので highest weight vector である．

Example 3.11. $\Lambda^2(E)$ **は既約ではなく** $\Lambda_0^2(E) \oplus \mathbb{C}$ と分解される．$\Lambda_0^2(E)$ の highest weight は $(1_2, 0_{n-2})$ である．**また** $\mathbb{C}$ **の基底は** E **上の複素シンプレクティック形式** σ **である**．実際これは不変元であり

$$\sigma = \frac{1}{2}\sum_{\alpha} \mathrm{sign}(\alpha)\epsilon_\alpha \wedge \epsilon_{-\alpha}$$

とかける．

Proof.

$$\sigma(\epsilon_\beta, \epsilon_\gamma) = -\frac{1}{2}\sum_{\alpha} \mathrm{sign}(\alpha)(\epsilon_{-\alpha}^* \wedge \epsilon_\alpha^*)(\epsilon_\beta, \epsilon_\gamma)$$
$$= -\frac{1}{2}\sum_{\alpha} \mathrm{sign}(\alpha)(\delta_{-\alpha\beta}\delta_{\gamma\alpha} - \delta_{\gamma-\alpha}\delta_{\alpha\beta})$$
$$= \mathrm{sign}(\beta)\delta_{-\gamma\beta}$$

■

Example 3.12. $S^2(E) = \mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$ は既約であり highest weight は $(2, 0_{n-1})$ である．

Example 3.13. $\Lambda^p(E)$（$0 \le p \le n$）を考える．これは既約ではない．これを分解するのにも σ を用いる．実際次のように既約分解することができる．

$$\Lambda^p(E) = \oplus_{k=0}^{[p/2]} \sigma^k \Lambda_0^{p-2k}(E), \quad \Lambda_0^p(E) = \ker \sigma^*$$

また既約成分 $\Lambda_0^p(E)$ の highest weight は $(1_p, 0_{n-p})$ である．この既約分解については後で詳しく見る．

Remark 3.23. この分解は $U(n)$ のときの $\Lambda^{p,q}$ に対するケーラー形式を使った既約分解と全く同様の方法で分解される．

Example 3.14. $\Lambda_0^k(E) \otimes \Lambda_0^l(E)$（$k \le l$）を既約分解して highest weight たちを辞書式で並べたときもっとも大きい highest weight をもつ既約成分を $\Lambda_0^{k,l}(E)$ と書く．この highest weight は $(2_k, 1_{l-k}.0_{n-1})$ である．($\Lambda_0^k(E)$ と $\Lambda_0^l(E)$ の highest weight vector を v_k, v_l としたとき $v_k \otimes v_l$ の weight は $(2_k, 1_{l-k}.0_{n-1}) = (1_k, 0_{n-k}) + (1_l, 0_{n-l})$ である）.

3.3.3 $Sp(n)$ の表現空間上の幾何構造

ここでは $Sp(n)$ の既約表現空間には実構造または四元数構造が入ることを証明する．表現論を詳しくない場合は下の命題だけ認めて先へ進んで欲しい.（詳しくは [3] を参照）

$Sp(n)$ の既約表現 (π_ρ, V_ρ) を考える．この表現の**双対表現を考えると，weight は π_ρ の weight をすべてマイナス倍したものであり，lowest weight は $-\rho$ である**．さて $Sp(n)$ **のワイル群は置換群および各成分の符号を変える群（$\simeq \mathbb{Z}_2^n$）との半直積**である．そこで双対表現の lowest weight$-\rho$ はワイル群の作用により，その表現の weight ρ へ移すことが出来る．これは双対表現の highest weight になる（明らか）．つまり (π_ρ, V_ρ) の双対表現を考えると同じ highest weight ρ をもつ既約表現である．**このように $Sp(n)$ の任意の既約表現と双対表現は同型**である．

$$(\pi_\rho, V_\rho) \simeq (\pi_\rho^*, V_\rho^*)$$

一方で，(π_ρ, V_ρ) の $Sp(n)$ 不変エルミート内積を使えば，この共役表現と双対表現は同型である．よって

$$V_\rho \simeq V_\rho^* \simeq \overline{V_\rho} \simeq \overline{V_\rho^*}$$

Example 3.15. 自然表現 E は複素シンプレクティック形式により $E \simeq E^*$ となりエルミート内積により $E^* \simeq \overline{E}$ となる．

上の表現空間の同型に対して別の見方をしてみよう．$Sp(n)$ 不変な V_ρ 上の二次形式の空間は $\mathrm{Hom}_{Sp(n)}(V_\rho, V_\rho^*)$（$Sp(n)$ 不変な V_ρ から V_ρ^* への準同形全体の空間）である．$V_\rho \simeq V_\rho^*$ から $\mathrm{Hom}_{Sp(n)}(V_\rho, V_\rho^*) = \mathrm{Hom}_{Sp(n)}(V_\rho, V_\rho) = \mathbb{C}$ となる（最後はシューアの補題）．つまり**既約表現空間には必ず $Sp(n)$ 不変な二次形式 Ω が入る**．さらに，この**二次形式は非退化であり交代または対称のどちらか**である．

Proof. $Sp(n)$ 不変な二次形式 Ω の radical つまり

$$\ker \Omega = \{\phi \mid \Omega(\phi, \psi) = 0, \quad \forall \psi \in V_\rho\}$$

を考える．$Sp(n)$ 不変性から，これは V_ρ の不変部分空間になるが V_ρ は既約なので零となる．よって Ω は非退化である．

次に

$$\Omega_\pm(\phi, \psi) := \Omega(\phi, \psi) \pm \Omega(\psi, \phi)$$

とする．これは $Sp(n)$ 不変な二次形式であり Ω_+ は対称，Ω_- は交代である．しかし $Sp(n)$ 不変な二次形式は 1 次元であったので，どちらかは零である．よって $\Omega = \Omega_\pm$ が成立する． ■

$Sp(n)$ 不変な二次形式 $\Omega_\pm$ および $V_\rho \simeq \overline{V_\rho} \simeq V_\rho^*$ を考えれば．V_ρ 上に Ω_+ が入るときには V_ρ には $Sp(n)$ 不変な実構造 $\mathfrak{J}$ がはいり，Ω_- が入るときには $Sp(n)$ 不変な四元

数構造$\mathfrak{J}$が入ることになる．またこのとき適当に正規化すれば$h(\mathfrak{J}\phi, \mathfrak{J}\psi) = h(\psi, \phi)$（$\forall\psi, \phi \in V_\rho$）をみたすこともわかる．

より具体的に見ていこう．$Sp(n)$の任意の既約表現は$E \otimes \cdots \otimes E$のある既約不変部分空間として実現される．$E$上の四元数構造$\mathfrak{J}$を用いれば$\otimes^{even}E$には実構造がはいり，$\otimes^{odd}E$のときには四元数構造がはいる．そこで

Proposition 3.15. $Sp(n)$の既約表現(π_ρ, V_ρ)を考える．**このとき**$\sum \rho^i \equiv 0 \mod 2$**なら**$Sp(n)$**不変な実構造**$\mathfrak{J}$**および複素内積構造が入り，**$\sum \rho^i \equiv 1 \mod 2$**なら**$Sp(n)$**不変な四元数構造**$\mathfrak{J}$**および複素シンプレクティック構造入る**．さらに，V_ρ上のエルミート内積hに関して，$h(\mathfrak{J}\phi, \mathfrak{J}\psi) = h(\psi, \phi)$をみたす（つまりエルミート構造と*compatible*なものが入るということ）．

3.3.4　$Sp(n)$ と $Spin(4n)$

$Sp(n) \subset SU(2n)$であるので次はあきらか.

Proposition 3.16. 下の可換図式をみたす，**リフト**F**は存在する**.

$$\begin{array}{ccc} & & Spin(4n) \\ & F \nearrow & \downarrow \mathrm{Ad} \\ Sp(n) & \xrightarrow{i} & SO(4n) \end{array}$$

また$Spin(4n) \to Spin^c(4n)$により$Sp(n)$は自然に$Spin^c(4n)$へも埋め込める．

そこでシンプレクティック群をクリフォード代数内に埋め込もう．複素シンプレクティックリー環$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$を複素クリフォード代数$\mathbb{C}l_{4n}$に埋め込むには,

$$x_{\alpha\beta} = \epsilon_\alpha \otimes \epsilon^*_\beta - \mathrm{sign}(\alpha\beta)\epsilon_{-\beta} \otimes \epsilon^*_{-\alpha} \mapsto a^\dagger_\alpha a_\beta - \mathrm{sign}(\alpha\beta) a^\dagger_{-\beta} a_{-\alpha} \in \mathbb{C}l_{4n}$$

とすればよい．同様にして$\mathfrak{sp}(n)$も埋め込める

3.3.5　スピノール表現

スピノール表現を考える．まずスピノール空間Wは$SU(2n)$に関して

$$W = \oplus_{p=0}^{2n} \Lambda^{0,p}$$

と分解されるのであった．$Sp(n) \subset SU(2n)$であるので，この$SU(2n)$に関する既約分解は$Sp(n)$に関する不変部分空間としての分解にはなっている．そこで$\Lambda^{0,p} = \Lambda^p(E)$をさらに分解することになる．

そのために複素シンプレクティック形式σに対応した作用素として,

$$\sigma = \frac{1}{2} \sum \mathrm{sign}(\alpha) a^\dagger_\alpha a^\dagger_{-\alpha}$$

および，その双対作用素

$$\sigma^* = -\frac{1}{2}\sum \mathrm{sign}(\alpha) a_\alpha a_{-\alpha}$$

をスピノール空間に作用させることを考える（σ と定数倍の違いはあるが，定数倍の違いは重要ではない）．このとき次の式が成立することに注意しよう．

$$[\sigma, \sigma^*] = N - n, \quad [N-n, \sigma] = 2\sigma, \quad [N-n, \sigma^*] = -2\sigma^*$$

そこで，$X := \sigma, Y := \sigma^*, H := N - n = [X, Y]$ **とすれば** $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ **を生成する**.

Proof.

$$\begin{aligned}
[\sigma, a_\beta] &= \frac{1}{2}\sum \mathrm{sign}(\alpha)(a_\alpha^\dagger a_{-\alpha}^\dagger a_\beta - a_\beta a_\alpha^\dagger a_{-\alpha}^\dagger) \\
&= \frac{1}{2}\sum \mathrm{sign}(\alpha)(a_\alpha^\dagger(\delta_{\beta-\alpha} - a_\beta a_{-\alpha}^\dagger) - (\delta_{\beta\alpha} - a_\alpha^\dagger a_\beta) a_{-\alpha}^\dagger) \\
&= \mathrm{sign}(\beta) a_{-\beta}^\dagger
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
[\sigma, \sigma^*] &= -\frac{1}{2}\sum \mathrm{sign}(\beta)([\sigma, a_\beta] a_{-\beta} + a_\beta [\sigma, a_{-\beta}]) \\
= &- \frac{1}{2}\sum \mathrm{sign}(\beta)(-\mathrm{sign}(\beta) a_{-\beta}^\dagger a_{-\beta} + \mathrm{sign}(\beta) a_\beta a_\beta^\dagger) = N - n
\end{aligned}$$

■

スピノール空間を実際に分解してみよう．考える空間は $\Lambda(E) := \oplus_p \Lambda^p(E)$ であった．まず $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ によって分解する．このとき $\ker \sigma^*$ が lowest vector の集まりであり，ここに σ を何回か当てていけば全体である $\Lambda(E)$ が復元できることになる．つまり

$$\Lambda(E) = \oplus_{l=0}^n \sigma^l \ker \sigma^*$$

となる．また σ をかけることは $\ker \sigma$（highest weight vector の集まり）以外では単射である．この $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 作用は $Sp(n)$ の作用と可換であるので，

$$\Lambda(E) = \oplus_{p=0}^{2n} \oplus_{l=0}^n (\sigma^l \ker \sigma^* \cap \Lambda^p(E))$$

とスピノール空間は分解される．

以下 $p \leq n$ とする．$\Lambda_0^p(E) := \ker \sigma^* \cap \Lambda^p(E)$ とすれば $\Lambda^p(E)$ は次のように分解できる，

$$\Lambda^p(E) = \oplus_{k=0}^{[p/2]} \sigma^k \Lambda_0^{p-2k}(E)$$

σ をかけることは単射であるので帰納法によって $\Lambda_0^p(E)$ の次元がわかり，

$$\binom{2n}{p} - \binom{2n}{p-2} = \binom{2n+1}{p}\frac{2n-2p+2}{2n-p+2}$$

となる．さらに $a_1^\dagger a_2^\dagger \cdots a_p^\dagger |vac\rangle$ を考えると，これは σ^* の作用で消えるので $\Lambda_0^p(E)$ に含まれる．一方，これは $Sp(n)$ に関して highest weight vector であり weight は $(1_p, 0_{n-p})$ であることがわかる．$\Lambda_0^p(E)$ は不変部分空間であるので $V_{(1_p,0_{n-p})} \subset \Lambda_0^p(E)$ となるが Weyl の次元公式により，$\dim V_{(1_p,0_{n-p})}$ を計算すれば，$V_{(1_p,0_{n-p})} = \Lambda_0^p(E)$ となる．このように上の分解は既約分解である．

Remark 3.24. この Weyl 次元公式を使った既約性の証明はよく用いる方法であるので覚えておくと便利．Weyl の次元公式は [8] を見よ．

さて $\phi \in \Lambda_0^{p-2k}(E)$ と仮定する．$\sigma^*\phi = 0$ であり $(N-n)\phi = (p-2k-n)\phi = -((n-p)+2k)\phi$ である．この ϕ は $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 表現の lowest weight vector であるので，σ により weight を上げることで $(n-p+2k)$ という weight をもつ $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 表現の highest weight vector に達する（weight は σ の作用で 2 ずつあがる）．つまり

$$\phi \xrightarrow{\sigma} \sigma\phi \xrightarrow{\sigma} \sigma^2\phi \xrightarrow{\sigma} \cdots \xrightarrow{\sigma} \sigma^{n-p+2k}\phi = \sigma^{n-p+k}\sigma^k\phi \xrightarrow{\sigma} 0$$

となる．そこで $\sigma^{n-p}\Lambda^p(E) \subset \Lambda^{2n-p}(E)$ となるが，各 $Sp(n)$ に対する既約成分 $\sigma^k\Lambda_0^{p-2k}(E)$ 上で σ^{n-p} は単射である．そして $\dim\Lambda^p(E) = \dim\Lambda^{2n-p}(E)$ であるので $\sigma^{n-p}\Lambda^p(E) = \Lambda^{2n-p}(E)$ となる．つまり

$$\Lambda^{2n-p}(E) = \oplus_{k=0}^{[p/2]}\sigma^{n-p+k}\Lambda_0^{p-2k}(E)$$

となり次数が高い交代テンソル積のほうも分解できた．よって

Proposition 3.17. $Sp(n)$ **の表現空間** $\Lambda^*(E)$ **は次のように既約分解される**．

$$\Lambda^p(E) = \oplus_{k=0}^{[p/2]}\sigma^k\Lambda_0^{p-2k}(E), \quad \Lambda^{2n-p}(E) = \oplus_{k=0}^{[p/2]}\sigma^{n-p+k}\Lambda_0^{p-2k}(E)$$

Remark 3.25. $\Lambda^p(E) \simeq \Lambda^{2n-p}(E)$ の表現空間としての同型は σ^n を使ってもできる．つまり $\phi \in \Lambda^p(E), \psi \in \Lambda^{2n-p}(E)$ とする．$\phi \wedge \psi = \langle\phi,\psi\rangle\sigma^n$ によって $\Lambda^p(E) \simeq (\Lambda^{2n-p}(E))^* \simeq \Lambda^{2n-p}(E)$ となる．

さて $\Lambda_0^p(E)$（$p = 0, \cdots, n$）を考えたとき

$$\oplus_{k=0}^{n-p}\sigma^k\Lambda_0^p(E)$$

は $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ **の highest weight** $n-p$ **の表現の** $\dim\Lambda_0^p(E)$ **個の直和**である．つまり，

$$\oplus_{k=0}^{n-p}\sigma^k\Lambda_0^p(E) = S^{n-p}\hat{\otimes}\Lambda_0^p(E)$$

である．ここで S^{n-p} は $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の highest weight が $n-p$ となる $n-p+1$ 次元既約表現を意味する．よって

Proposition 3.18. **スピノール空間** $W = \Lambda(E)$ **を** $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sp}(n)$ **の表現空間としてみたときに**

$$W = \oplus_{p=0}^n S^{n-p}\hat{\otimes}\Lambda_0^p(E)$$

と既約分解される．

3.4 再びスピン群の表現

特殊直交群 $SO(n)$ またはスピン群 $Spin(n)$ の表現論について論じる．

3.4.1 スピン群の表現論

$\mathfrak{g} = \mathfrak{spin}(n)$ として，$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ をその複素化とする．これらのリー環をクリフォード代数内に埋め込んでおく．以前みたように，表現論をやるときは基底として $[e_k, e_l]$ ではなく，つぎのようなものがよい.（スピン幾何入門１を参照）.

1. $n = 2m$ のとき，$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の基底は

$$\begin{aligned}\{\omega_k = a_k^\dagger a_k - 1/2\}_{k=1}^m \cup \{a_k^\dagger a_l\}_{k<l} \cup \{a_k a_l^\dagger\}_{k<l}\\ \cup\{a_k a_l\}_{k<l} \cup \{a_k^\dagger a_l^\dagger\}_{k<l}\end{aligned}$$

   となる．$\{a_k^\dagger a_l\}_{k<l}$, $\{a_k^\dagger a_l^\dagger\}_{k<l}$ が正ルートの空間に対応する．

2. $n = 2m + 1$ のとき，$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の基底は

$$\begin{aligned}\{\omega_k = a_k^\dagger a_k - 1/2\}_{k=1}^m \cup \{a_k^\dagger a_l\}_{k<l} \cup \{a_k a_l\}_{k<l} \cup \{a_k a_l^\dagger\}_{k<l}\\ \cup\{a_k^\dagger a_l^\dagger\}_{k<l} \cup \{a_k b\}_{k=1}^m \cup \{a_k^\dagger b\}_{k=1}^m\end{aligned}$$

   $\{a_k^\dagger a_l\}_{k<l}$, $\{a_k^\dagger a_l^\dagger\}_{k<l}$, $\{a_k^\dagger b\}_k$ が正ルートの空間に対応する．

$\mathfrak{g}$ の基底を書くには，これらの実制限を考えればよい．実構造は単純に複素共役をとったものである（$\overline{a_k^\dagger} = -a_k$, $\overline{a_k} = -a_k^\dagger$）．例えば $a_k^\dagger a_l + a_k a_l^\dagger$，$\sqrt{-1}(a_k^\dagger a_l - a_k a_l^\dagger)$ は $\mathfrak{g}$ に入る．

カルタン部分環 $\mathfrak{h}$ の $\sqrt{-1}$ 倍である，

$$\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} := \sqrt{-1}\mathfrak{h} = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{\omega_1, \cdots, \omega_m\}$$

を考える．

$\mathfrak{g}$ の有限次元ユニタリ表現 (π, V) があるとき，それを $\mathfrak{h}$ に制限する．ユニタリ性から $\pi(h)$ は歪エルミート行列であり，虚数の固有値を持つ固有空間に分解できる．さらに $\mathfrak{h}$ は可換なので同時固有分解ができる．$\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ で考えれば，実の固有値をもつので, 各同時固有空間 $V(\lambda)$ に対して, 同時固有値 $\lambda \in (\mathfrak{h}_{\mathbb{R}})^*$ が定まる．これを **weight** という．これらを $\lambda = (\lambda^1, \cdots, \lambda^m)$ と書く．ここで λ^i が ω_i に対する固有値である．

weight λ が正であるとは，$\lambda^1 = \lambda^2 = \cdots = \lambda^k = 0, \lambda^{k+1} > 0$ となる k が存在すること．また weight λ, λ' に対して，$\lambda > \lambda'$ を $\lambda - \lambda' > 0$ で定義．この順序が辞書式順序である．

有限次元既約ユニタリ表現を考えたときに，weight 分解をすれば highest weight ρ が唯一つ定まる．さらに ρ は次の **dominant integral 条件**を満たす：

$$\rho = (\rho^1, \cdots, \rho^m) \text{ in } \mathbb{Z}^m \text{ or } (\mathbb{Z} + 1/2)^m$$

かつ

$$\begin{aligned} \rho^1 \geq \cdots \rho^{m-1} \geq |\rho^m| \quad & \text{for } n = 2m, \\ \rho^1 \geq \cdots \rho^{m-1} \geq \rho^m \geq 0 \quad & \text{for } n = 2m+1. \end{aligned}$$

またこのような条件をみたす ρ に対して, highest weight を ρ にもつ，$\mathfrak{g}$ の有限次元既約ユニタリ表現が（同値なものを除いて）唯一つ定まる．**そこで** (π_ρ, V_ρ) **によって highest weight を** ρ **にもつ有限次元既約ユニタリ表現を表す**ことにする．

Remark 3.26. $\rho \in (\mathbb{Z} + 1/2)^m$ であるので，integral という言い方はおかしいと思うかもしれないが，integral 条件の正確な定義は root を使って定義するので仕方がない．例えばスピノール表現は $\rho \in (\mathbb{Z} + 1/2)^m$ をみたし $\mathfrak{g}$ の表現である．リー群でみると $SO(n)$ **の表現を考えるときには，必ず** $\rho \in \mathbb{Z}^m$ **となる**ので integral 条件といってよいであろう．**スピン群の表現を考えるときには** $\rho \in \mathbb{Z}^m$ **と** $\rho \in (\mathbb{Z} + 1/2)^m$ **のどちらも考えられる**．そのときには **integral or half-integral 条件**などという．

つまり $\rho \in \mathbb{Z}^m$ のときは $\mathfrak{g}$ の表現は $SO(n)$ の表現であり，これをスピン群の表現とみるときには，$\mathrm{Ad} : Spin(n) \to SO(n)$ と合成すればよい．$\rho \in (\mathbb{Z} + 1/2)^m$ のときはスピン群の表現へとなるが Ad を通すことができず，$SO(n)$ の表現とはなりえない．

3.4.2 具体的な表現

既約表現のいくつかの例をあげる．

Example 3.16. （$SO(n)$ の自然表現）$Spin(n)$ の随伴表現 $(\pi_{\mathrm{Ad}}, \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{C})$ を考える．これは $SO(n)$ の（複素）自然表現である．リー環の表現として定義は

$$\pi_{\mathrm{Ad}}([e_i, e_j])a = [[e_i, e_j], a]. \tag{3.5}$$

である．我々は $\mathbb{C}^n$ の基底として $\{a_k\}_k \cup \{a_k^\dagger\}_k$（for $n = 2m$），$\{a_k\}_k \cup \{a_k^\dagger\}_k \cup \{b\}$（for $n = 2m+1$）を選ぶ．この基底は自然なエルミート内積に対して直交している．$n = 2m$ の場合のみ調べる．$[\omega_k, a_i] = -\delta_{ki} a_i$，$[\omega_k, a_i^\dagger] = \delta_{ki} a_i^\dagger$ であるので a_i，$a_i^\dagger$ は weight vector であり，weight はそれぞれ $(0_{i-1}, -1, 0_{m-i})$，$(0_{i-1}, 1, 0_{m-i})$ となる．また各 weight の重複度は 1 となる．そして順序づけすると highest weight vector は $a_1^\dagger$ であり highest weight は $(1, 0_{m-1})$ である．

Example 3.17. 対称テンソル積空間は既約とはならない．q 次対称テンソル積空間は q 次多項式 S^q と同一視できる．この**既約成分の一つはラプラス作用素で零とな**

る調和多項式空間である．また $\sum x_i^2$ とラプラシアンを使って S^q を分解できる（これもケーラー形式を使った $\Lambda^{p,q}$ の分解と同じようにすればよい）．

H^q を $\mathbb{R}^n$ 上次数 q の（複素）調和多項式の空間とする．$\mathfrak{spin}(n)$ の作用は次のよう：

$$\mathfrak{spin}(n) \times H^q \ni ([e_k, e_l], f(x)) \mapsto -4x_k \frac{\partial f}{\partial x_l} + 4x_l \frac{\partial f}{\partial x_k} \in H^q. \tag{3.6}$$

これは既約表現で highest weight vector は $\bar{z}_1^q = \overline{x_1 - \sqrt{-1}x_2}^q$ で highest weight は $(q, 0_{m-1})$ となる．また

$$\dim H^q = \frac{(n+q-3)!}{q!(n-2)!}(n+2q-2).$$

Example 3.18.（クリフォード代数または外積代数への表現，$n = 2m$ の時）Λ^p を複素ベクトル空間 $\Lambda^p := \Lambda^p(\mathbb{R}^{2m}) \otimes \mathbb{C}$ とする．つまり p 次の外テンソル積の空間．$\sum \Lambda^p = \mathbb{C}l_{2m}$ であるので，$\mathfrak{spin}(2m)$ の作用を $\mathrm{ad}([e_k, e_l])(\phi) = [[e_k, e_l], \phi]$ for ϕ in Λ^p により定義する．$0 \leq p \leq m-1$ に対して Λ^p **は** Λ^{2m-p} **とホッジ作用（体積要素）により同値**である．**そして** Λ^p **は** $\binom{2m}{p}$ **次元の既約表現空間になる**．highest weight vector は $a_1^\dagger \wedge \cdots \wedge a_p^\dagger$ であり highest weight は $(1_p, 0_{m-p})$ である．$p = m$ のときは Λ^m は既約表現空間 Λ_+^m と Λ_-^m の直和に分解される．ここで次元はそれぞれ $\frac{1}{2}\binom{2m}{m}$ である．また Λ_+^m（resp. Λ_-^m）の highest weight vector は $a_{1\wedge}^\dagger \cdots {}_\wedge a_m^\dagger$ であり highest weight は (1_m)（resp. $a_1^\dagger \wedge \cdots a_{m-1}^\dagger \wedge a_m$ with weight $(1_{m-1}, -1)$）である．この分解を説明しよう．$\sum \Lambda^p \simeq \mathbb{C}l_{2m}$ 上で体積要素 ω は $\mathfrak{spin}(2m)$ の作用と可換である．そして $\omega^2 = 1$ かつ $e_k\omega = -\omega e_k$ であり $\omega : \Lambda^p \to \Lambda^{2m-p}$ となる．とくに ω は Λ^m を ± 1 固有空間へ分解する．$\omega(a_1^\dagger \wedge \cdots \wedge a_m^\dagger) = a_1^\dagger \wedge \cdots \wedge a_m^\dagger$ であるので $\Lambda_\pm^m$ はそれぞれ ω に対して固有値 ± 1 となる．

Remark 3.27. $n = 4$ のとき，$\Lambda^2 = \Lambda_+^2 \oplus \Lambda_-^2$ は良く知られた自己双対と反自己双対空間への分解．

Remark 3.28. $\Lambda^p \oplus \Lambda^{2m-p}$ は同値な表現空間の直和である．ここに ω を作用させたとき，それぞれは ω に対して不変ではない．$\omega^2 = 1$ であるので，$\Lambda^p \oplus \Lambda^{2m-p}$ は $V(1) \oplus V(-1)$ という別の分解を得る．もちろん $V(1), V(-1)$ は既約表現空間である．これは同値な表現の直和を考えたとき分解の仕方は幾らでもあるということを意味している．

Remark 3.29. $n = 2m = 4k+2$ の場合には $\Lambda^m = \Lambda_+^m \oplus \Lambda_-^m$ の分解は複素化して初めてできる分解である（詳しくは後で）．

Example 3.19.（外積代数への表現，$n = 2m+1$ のとき）Λ^p を $\Lambda^p(\mathbb{R}^{2m+1}) \otimes \mathbb{C}$ とする．次元は $\binom{2m+1}{p}$ である．$\mathfrak{spin}(2m+1)$ の作用は $n = 2m$ のときと同様．$0 \leq p \leq m$ に対して，Λ^p は Λ^{2m+1-p} と同値であり，highest weight vector が $a_1^\dagger \wedge \cdots \wedge a_p^\dagger$ で highest weight $(1_p, 0_{m-p})$ の既約表現になる．

3.4.3　表現空間上の幾何的な構造

$SO(n)$ の $\Lambda^p = \Lambda^p(\mathbb{R}^n)\otimes\mathbb{C}$ **への表現は明らかに実構造をもつ，その実部は** $\Lambda^p(\mathbb{R}^n)$ **である**．また $\mathbb{R}^n \simeq (\mathbb{R}^n)^*$ であるので，$\Lambda^p \simeq (\Lambda^p)^*$ である．$Sp(n)$ の場合と同様にして，これは Λ^p **に** $SO(n)$ **不変な非退化対称形式が入る**ことと同値である．今の場合には，$\Lambda^p(\mathbb{R}^n)$ 上の $SO(n)$ 不変内積を複素線形で拡張したものを使えばよい．

$n = 2m$ の場合に Λ^m を考えてみる．これを分解する際の体積要素 ω は複素体積要素であったので実構造をたもつとは限らない．そこで**実構造を保つ Hodge 作用素**を考える $*:\Lambda^p(\mathbb{R}^n) \to \Lambda^{n-p}(\mathbb{R}^n)$ であり $*^2 = (-1)^{p(n-p)}$ をみたすものである．特に $n = 2m$ で $*\Lambda^m(\mathbb{R}^{2m}) \to \Lambda^m(\mathbb{R}^{2m})$ は $*^2 = (-1)^m$ をみたす．そこで $n = 2m = 4l$ の場合には $*^2 = 1$ であり，$n = 2m = 4l+2$ の場合は $*^2 = -1$ である．

このように $n = 4l$ **の場合には** $\Lambda^{2l}(\mathbb{R}^{4l})$ **は実のまま固有分解することができ，複素化した** $\Lambda^{2l}_{\pm}$ **に実構造が入り，**$\Lambda^{2l}_{\pm} = (\Lambda^{2l}_{\pm})^*$ **となる**．**しかし** $n = 4l+2$ **の場合には** $\Lambda^{2l+1}(\mathbb{R}^{4l+2})$ **は複素化しないと既約分解できない**のである．つまり自然な実構造をいれることができない．実際，次に行うスピノールの議論と同様にして $\Lambda^{2l+1}_{\pm}$ と $(\Lambda^{2l+1}_{\pm})^*$ は表現空間として同型でなく，$\Lambda^{2l+1}_{\pm}$ には $SO(n)$ 不変な実構造または四元数構造は入らないことがわかる．**しかし** $\Lambda^{2l+1}_{\pm} \simeq (\Lambda^{2l+1}_{\mp})^*$ **はいえる**．つまり Λ^{2l+1} には自然な不変実構造がはいるのであるが，それは $\Lambda^{2l+1}_{\pm}$ を入れ替えてしまうのである．

次にスピノール空間に適当な場合には $Spin(n)$ 不変な**実構造**または**四元数構造**が入ることを見ていこう．これについては「スピン幾何入門１」において少し述べた．より詳しく見てみる．

まずスピノール表現とその双対表現が同値になるかを考える．手法は $Sp(n)$ のときと同様である．

まず $n = 2m+1$ の場合を考える．スピノール表現 Δ_{2m+1} の highest weight は $((1/2)_m)$ である．また weight は $\pm 1/2$ をならべたものである．双対表現を考えると weight はすべてマイナス倍されるが，その highest weight は $((1/2)_m)$ である．よって $\Delta_{2m+1} \simeq (\Delta_{2m+1})^*$ が成立する．

次に $n = 2m$ の場合を考える．スピノール表現 $\Delta^{\pm}_{2m}$ の highest weight は $((1/2)_{m-1}, \pm 1/2)$ である．また weight は $1/2$, $-1/2$ を適当にならべたものである．双対表現を考えると weight はすべてマイナス倍される，このとき次のような場合分けが必要

1. $n = 4l$ とする．$\Delta^{\pm}_{4l}$ の weight は $1/2$, $-1/2$ を適当に $2l$ 個ならべたものであるが Δ^{+}_{4l} の各 weight の $1/2$ の個数は偶数個で $-1/2$ の個数も偶数個である．その双対表現を考えると，各 weight をマイナス倍すればよいので各 weight の $1/2$ の個数は偶数個で $-1/2$ の個数も偶数個ある．特に highest weight として $((1/2)_{2l})$ をもつ．よって $\Delta^{+}_{4l} \simeq (\Delta^{+}_{4l})^*$ となる．同様にして Δ^{-}_{4l} の各 weight の $1/2$ の個数は奇数個で $-1/2$ の個数も奇数個ある．よって $\Delta^{-}_{4l} \simeq (\Delta^{-}_{4l})^*$ となる．

2. $n = 4l+2$ とする．Δ^{+}_{4l+2} の各 weight の 1/2 の個数は奇数で $-1/2$ の個数は偶数である（特に highest weight は 1/2 を $2l+1$ 個ならべたもの）．そしてその双対表現を考えると，各 weight をマイナス倍すればよいので各 weight の 1/2 の個数は偶数で $-1/2$ の個数は奇数個ある．よって highest weight として $((1/2)_{2l}, -1/2)$ をもつ．以上から $(\Delta^{\pm}_{4l+2})^* \simeq \Delta^{\mp}_{4l+2}$ である．特に $\Delta^{\pm}_{4l+2}$ それ自身には四元数構造や実構造は入らない．

Remark 3.30. 双対表現の highest weight を見つけるには，$Sp(n)$ のときと同様にワイル群の作用を使ってもよい．$SO(n)$ のワイル群は次のようになる．

1. $n = 2m$ のとき．ワイル群 W は，置換及び偶数個の符号の入れ替えである．$|W| = m!2^{m-1}$.
2. $n = 2m+1$ のとき．ワイル群 W は，置換及び符号の入れ替えである．$|W| = m!2^m$.

Proposition 3.19. スピン群の表現空間として次の同型が成立する．

1. $n = 2m+1$ のとき．$\Delta_{2m+1} \simeq \Delta^*_{2m+1}$.

2. $n = 2m$ のとき，$\Delta_{2m} \simeq \Delta^*_{2m}$．さらに

  (a) $n = 4l$ のとき $\Delta^{\pm}_{4l} \simeq (\Delta^{\pm}_{4l})^*$.

  (b) $n = 4l+2$ のとき $\Delta^{\pm}_{4l+2} \simeq (\Delta^{\mp}_{4l+2})^*$.

そこで，実構造または四元数構造のどちらが入るかについて議論していこう．実クリフォード代数 $Cl_n = Cl_{n,0}$ は次のように実現できた．

$$Cl_1 = \mathbb{C}, \quad Cl_2 = \mathbb{H}, \quad Cl_3 = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}, \quad Cl_4 = \mathbb{H}(2)$$
$$Cl_5 = \mathbb{C}(4) \quad Cl_6 = \mathbb{R}(8) \quad Cl_7 = \mathbb{R}(8) \oplus \mathbb{R}(8) \quad Cl_8 = \mathbb{R}(16)$$

そこでこれらを複素化すれば次のことがわかる．

1. $n = 8k+2$ のとき，Δ_{8k+2} には，実クリフォード代数の作用と可換よってスピン群の作用と可換な四元数構造が入る．しかしこの四元数構造は既約成分を入れ替える．つまり $\mathfrak{J} : \Delta^{\pm}_{8k+2} \to \Delta^{\mp}_{8k+2}$ となってしまう．
2. $n = 8k+3$ のとき．Δ_{8k+3} には，実クリフォード代数の作用と可換よってスピン群の作用と可換な四元数構造が入る．
3. $n = 8k+4$ のとき．Δ_{8k+4} には，実クリフォード代数の作用と可換よってスピン群の作用と可換な四元数構造が入る．さらに $n = 8k+3$ の時を考慮すれば $\Delta^{\pm}_{8k+4}$ にもスピン群の作用と可換な四元数構造が入る．

4. $n=8k+6$ のとき．Δ_{8k+6} には，実クリフォード代数の作用と可換よってスピン群の作用と可換な実構造が入る．しかし実構造は既約成分を入れ替える．$\mathfrak{J}:\Delta^{\pm}_{8k+6}\to\Delta^{\mp}_{8k+6}$.

5. $n=8k+7$ のとき．Δ_{8k+7} には，実クリフォード代数の作用と可換よってスピン群の作用と可換な実構造が入る．

6. $n=8k$ のとき．Δ_{8k+8} には，実クリフォード代数の作用と可換よってスピン群の作用と可換な実構造が入る．さらに，$\Delta^{\pm}_{8k+8}$ にもスピン群の作用と可換な実構造が入る．

$n=8k+1,8k+5$ の場合にはどうすればよいのであろうか．これらの場合には，$Cl_{0,n}$ を考える．この実現は

$$Cl_{0,1}=\mathbb{R}\oplus\mathbb{R},\quad Cl_{0,2}=\mathbb{R}(2),\quad Cl_{0,3}=\mathbb{C}(2),\quad Cl_{0,4}=\mathbb{H}(2)$$
$$Cl_{0,5}=\mathbb{H}(2)\oplus\mathbb{H}(2)\quad Cl_{0,6}=\mathbb{H}(4)\quad Cl_{0,7}=\mathbb{C}(8)\quad Cl_{0,8}=\mathbb{R}(16)$$

であった．この実現を使えばスピノール表現に $Cl_{0,n}$ と可換な四元数構造または実構造がはいることがわかるが $Spin(n)$ は $Cl_{0,n}$ 内で実現できない．

つぎのように考える．$\mathbb{C}l_n=Cl_{n,0}\otimes\mathbb{C}$ であった．$\mathbb{R}^{0,n}$ の基底を $\{e'_i\}_i$ として，

$$\mathbb{C}l_n=Cl_n\otimes\mathbb{C}\ni e_i\mapsto\sqrt{-1}e'_i\in Cl_{n,0}\otimes\mathbb{C}=\mathbb{C}l_n$$

を考えると，これは複素クリフォード代数の同型である．よって**上で作った $Cl_{0,n}$ と可換な四元数構造または実構造は $Cl_{n,0}$ の作用と反可換である**．ここで反可換とは $v\in\mathbb{R}^n\subset Cl_{n,0}$ の作用と反可換であること．実際，その構造を $\mathfrak{J}$ と書けば，$\mathfrak{J}(e_i\cdot\phi)=\mathfrak{J}(\sqrt{-1}e'_i\cdot\phi)=-\sqrt{-1}e'_i\mathfrak{J}(\phi)=-e_i\mathfrak{J}(\phi)$ となる．そこで

1. $n=8k+1$ のとき，Δ_{8k+1} には，実クリフォード代数の作用と反可換よってスピン群の作用と可換な実構造が入る．

2. $n=8k+2$ のとき，Δ_{8k+2} には，実クリフォード代数の作用と反可換よってスピン群の作用と可換な実構造が入る．

3. $n=8k+4$ のとき，Δ_{8k+4} には，実クリフォード代数の作用と反可換よってスピン群の作用と可換な四元数構造が入る．

4. $n=8k+5$ のとき，Δ_{8k+5} には，実クリフォード代数の作用と反可換よってスピン群の作用と可換な四元数構造が入る．

5. $n=8k+6$ のとき，Δ_{8k+6} には，実クリフォード代数の作用と反可換よってスピン群の作用と可換な四元数構造が入る．

6. $n=8k+8$ のとき，Δ_{8k+8} には，実クリフォード代数の作用と反可換よってスピン群の作用と可換な実構造が入る．

Remark 3.31. $Cl_{n,0}$ のときと同様に $n=8k+6, 8k+5$ のときを考えると $\Delta^{\pm}_{8k+6}$ にスピン群の作用と可換な四元数構造が入りそうであるが，$\Delta^{\pm}_{8k+6}$ の定義には $\mathbb{C}l^0_n \simeq \mathbb{C}l_{n-1}$ を使っていたので，e_1e_2 については可換でも e_1e_n については反可換となってしまうので駄目．

Remark 3.32. 実クリフォード代数 $Cl_{r,s}$ を考えても同様のことができるかを考えてみると，$e_1,\cdots,e_r$ とは可換で，$e_{r+1},\cdots.e_{r+s}$ とは反可換な四元数構造または実構造が入ることになる．例えば e_1e_{r+1} とは反可換であり，スピン群の作用とは可換でなくなってしまう．

以上をまとめると

Proposition 3.20. スピノール空間には次のような構造が入る．

1. $n=8k+1$ のとき，Δ_{8k+1} には，実クリフォード代数の作用と反可換で，**スピン群の作用と可換な実構造**が入る．

2. $n=8k+2$ のとき，Δ_{8k+2} には，実クリフォード代数の作用と可換な四元数構造が入る．また反可換な実構造が入る．よってスピン群の作用と可換な実構造または四元数構造が入る．しかし $\Delta^{\pm}_{8k+2}$ には**スピン群の作用と可換な構造は入らない**．

3. $n=8k+3$ のとき．Δ_{8k+3} には，実クリフォード代数の作用と可換よって**スピン群の作用と可換な四元数構造**が入る．

4. $n=8k+4$ のとき．Δ_{8k+4} には，実クリフォード代数の作用と可換または反可換な四元数構造が入る．よってスピン群の作用と可換な四元数構造が入る．**さらに $\Delta^{\pm}_{8k+4}$ にもスピン群の作用と可換な四元数構造**が入る．

5. $n=8k+5$ のとき．Δ_{8k+5} には，実クリフォード代数の作用と反可換よって**スピン群の作用と可換な四元数構造**が入る．

6. $n=8k+6$ のとき．Δ_{8k+6} には，実クリフォード代数の作用と可換な実構造が入る．また反可換な四元数構造が入る．よってスピン群の作用と可換な実構造または四元数構造が入る．**しかし $\Delta^{\pm}_{8k+6}$ には可換な構造は入らない**．

7. $n=8k+7$ のとき．Δ_{8k+7} には，実クリフォード代数の作用と可換よって**スピン群の作用と可換な実構造**が入る．

8. $n=8k$ のとき．Δ_{8k+8} には，実クリフォード代数の作用と可換または反可換な実構造が入る．よってスピン群の作用とも可換な実構造が入る．**さらに，$\Delta^{\pm}_{8k+8}$ にもスピン群の作用と可換な実構造**が入る．

Example 3.20. $n=2$ の場合にみてみる．$\Delta_2 = \Delta_2^+ \oplus \Delta_2^- = \mathbb{C}\oplus\mathbb{C}$ である．このときの $U(1) = Spin(2)$ の作用は $e^{i\theta}(z,w) = (e^{i\theta}z, e^{-i\theta}w)$ である．

そこで実構造として $(z,w)\mapsto(\bar{w},\bar{z})$，四元数構造として $(z,w)\mapsto(-\bar{w},\bar{z})$ を考えると，これは $U(1)$ の作用と可換である．しかし実構造，四元数構造は $\Delta_2^{\pm}$ を入れ替えている．

またこの例をみてわかるが表現空間を入れ替えてしまうような場合は実構造，四元数構造どちらかが入れば，もう一つも入る．この例のようにマイナスをつければよい．別の見方をすると $V\oplus V^*$ には非退化複素内積または非退化交代形式が入る．実際，

$$\Omega_{\pm}(e+f, e'+f') = f'(e) \pm f(e')$$

とすればよい．Ω_- は T^*M の標準的なシンプレクティック形式の入れ方と同じである．

Example 3.21. $\mathfrak{u}(n)\subset\mathfrak{spin}(2n)$ と見たときを考える．スピノール表現を $W=\oplus W^p$ としたときに，ケーラー形式 Ω は $\sqrt{-1}(2p-m)$ で作用する．そして Ω は実クリフォード代数内に入るので四元数または実構造と可換である．よって $\phi_p\in W^p$ に対して

$$\Omega\mathfrak{J}\phi = \mathfrak{J}\Omega\phi = -\sqrt{-1}(2p-n)\mathfrak{J}\phi = \sqrt{-1}(2(n-p)-p)\mathfrak{J}\phi$$

を得る．つまり $\mathfrak{u}(n)$ の表現空間として $\mathfrak{J}: W^p \simeq \overline{W^{n-p}}$ を与える．

$\mathfrak{u}(n)\subset\mathfrak{spin}^c(n)$ とみなしたときは，このようなことはできない．なぜなら $\mathfrak{u}(n)$ を複素クリフォード代数に埋め込んでるので，四元数構造または実構造は $\mathfrak{u}(n)$ の作用とは可換とは限らない．

さて，より一般の既約表現に実構造や四元数構造は入るかはさらに複雑である．例えば $n=8k+2$ のときには $\Delta_{8k+2}^{\pm}$ には実構造または四元数構造は入らないが，$\Delta_{8k+2}^+\otimes\Delta_{8k+2}^-$ の既約成分である Λ^{2k} には実構造が入る．

以下の議論は後で特に使わないので，表現論に詳しくない人はとばして次に進んでほしい．

まず既約表現とその双対表現が同値であるかどうかを判別する必要がある．

1. $n=2m$ のとき．$\Lambda^p = (1_p, 0_{m-p})$（$1\le p\le m-2$），$\Delta_{2m}^{\pm} = ((1/2)_{m-1}, \pm 1/2)$ は**基本表現と呼ばれるものであり，任意の既約表現の highest weight はこれらの非負整数係数の線形結合としてかける**．つまり

$$\rho = (\sum_{p=1}^{m-2} n_p\Lambda^p) + k^+\Delta_{2m}^+ + k^-\Delta_{2m}^-, \quad n_p, k^{\pm}\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$$

となる（例えば $(1_{m-1}, -1) = 2\Delta_{2m}^-$）．そして，この highest weight ρ をもつ既約表現は

$$(\bigotimes_{p=1}^{m-2}\otimes^{n_p}\Lambda^p)\otimes(\otimes^{k^+}\Delta_{2m}^+)\otimes(\otimes^{k^-}\Delta_{2m}^-)$$

の top な既約成分としてかける．

この双対表現の highest weight は

$$\begin{cases}\rho & n=4l \\ (\sum_{p=1}^{m-2} n_p\Lambda^p)+k^-\Delta^+_{2m}+k^+\Delta^-_{2m} & n=4l+2\end{cases}$$

となる．よって $n=4l$ **なら既約表現とその双対表現は同値であるが，** $n=4l+2$ **なら** $k^+=k^-$ **となることが必要十分条件**．つまり

$$\rho=(\sum_{p=1}^{2l-1} n_p\Lambda^p)+k(\Delta^+_{4l+2}+\Delta^-_{4l+2})$$

となるものである（またこのとき $\rho\in\mathbb{Z}^{2l+1}$ であるので必ず $SO(4l+2)$ の表現へ落ちる）．

2. $n=2m+1$ のとき．$\Lambda^p=(1_p,0_{m-p})$（$1\leq p\leq m-1$），$\Delta_{2m+1}=((1/2)_m)$ が**基本表現**である．この場合にも既約表現の highest weight ρ は基本表現の非負整数係数の線形結合である．そして**既約表現とその双対表現は同値である**ことがわかる．

Proof. ρ をもつ既約表現の双対をとれば $-\rho$ が lowest weight である．これを Weyl 群 $\mathfrak{W}$ の作用させた時もっとも大きいものが双対表現の highest weight である（weight 図形を考えると highest weight と loweset weight は同じ $\mathfrak{W}$ 軌道上にある）．つまり，ある $w_0\in\mathfrak{W}$ が存在して $-\rho=w_0(\rho)$ となるときが既約表現と双対表現が同値になるための必要十分条件である．またこのような w_0 は root に作用させたときには positve root の空間 Φ^+ に対して $w_0(\Phi^+)=-\Phi^+$ となるものである（実は一つしかない）．

例えば $n=2m+1$ の場合にワイル群は置換および符号の変換であったので，ワイル群の作用により

$$-(\rho^1,\cdots,\rho^n)\mapsto(\rho^1,\cdots,\rho^n)$$

とできる．つまり w_0 は各成分の符号を変えるもの． ■

そこで $V_\rho\simeq V_\rho^*$ と仮定する．ここには不変実構造または四元数構造が入ることになる．どちらが入るかを判別しよう．

1. n が偶数

   (a) まず $n=4l+2$ の場合を考える．$V_\rho\simeq V_\rho^*$ なので，

$$\rho=(\sum_{p=1}^{2l-1} n_p\Lambda^p)+k(\Delta^+_{4l+2}+\Delta^-_{4l+2})$$

とかける．$\Delta^+_{4l+2}+\Delta^-_{4l+2}=\Lambda^{2l}=(1_{2l},0)$ である．ここには実構造が入った．Λ^p の実構造に対応した複素内積をテンソル積して

$$(\bigotimes_{p=1}^{2l-1}\otimes^{n_p}\Lambda^p)\otimes k(\Lambda^{2l})$$

に複素内積をいれる．これを top な既約成分に制限すれば，複素内積がはいる．つまり，この場合には V_ρ には実構造がはいる．

Remark 3.33. 複素内積を制限すれば不変複素内積になるが，零となる可能性がある．しかし，top な既約成分にはそれぞれの highest weight v_i をテンソル積したものが highest weight vector v_ρ である．このとき $\langle v_i, v_i\rangle \neq 0$ であるので $\langle v_\rho, v_\rho\rangle \neq 0$ であることはすぐわかる．

(b) つぎに $n=8l$ の場合．すべての既約表現は双対表現と同値であった．またこの場合には基本表現にはすべて実構造が入る．上と同様にすれば，V_ρ には実構造がはいる．

(c) $n=8l+4$ の場合．すべての既約表現は双対表現と同値であった．また基本表現である外積表現には実構造，スピノール表現には四元数構造がはいった．四元数構造の偶数回テンソル積は実構造であり，奇数回テンソル積は四元数構造であることに注意すれば．

$$\rho=(\sum_{p=1} n_p\Lambda^p)+k^+\Delta^+_{8l+4}+k^-\Delta^-_{8l+4},\quad n_p,k^\pm\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$$

と書いたときに k^++k^- が偶数なら実構造が入り（このときは $SO(8l+4)$ の表現に落ちる），奇数なら四元数構造が入る．

2. n が奇数

(a) $n=2m+1=8l+1,8l+7$ のとき．すべての既約表現は双対表現と同値であった．また基本表現にはすべて実構造が入る．よって V_ρ には実構造が入る．

(b) $n=8k+3,8k+5$ のとき．すべての既約表現は双対表現と同値であった．また外積表現には実構造が入り，スピノール表現には四元数構造が入る．そこで ρ を

$$\rho=(\sum_{p=1}^{m-1} n_p\Lambda^p)+k\Delta_{2m+1}$$

と書いたときスピノール表現の係数 k が偶数なら実構造（$SO(2m+1)$ の表現に落ちる）が入り，奇数なら四元数構造がはいる．

Remark 3.34. 特殊直交群の表現に落ちる表現には，実構造が入る．

3.4.4 $\mathbb{C}l_{2m}$ への二つの grading

局所指数定理でオイラー数を与える指数定理と符号数を与える指数定理を証明する際，に考えるべきベクトル束はどちらも微分形式のベクトル束 $\oplus\Lambda^*$ である．何故，同じ指数を与えないかというと，ベクトル束への $\mathbb{Z}_2$ 次数のつけ方が違うからである．このことについて考える．

クリフォード代数は外積代数（自分自身）の空間に自然に作用する．作用としては右から及び左からの作用がある．右からの作用は

$$\mathbb{C}l_{2m} \times \mathbb{C}l_{2m} \ni (\phi, v) \mapsto v \cdot \phi^t \in \mathbb{C}l_{2m}$$

で定義される．ここで $(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_k})^t = e_{i_k}\cdots e_{i_2}e_{i_1}$ である．また右からの作用と左からの作用は明らかに可換な作用．これらの作用は $\mathbb{C}l_{2m} = W_{2m} \otimes W_{2m}^* = \mathrm{Hom}(W_{2m}, W_{2m})$ であることに対応している（W_{2m} はスピノール空間．$\mathbb{C}l_{2m} = \mathbb{C}(2^m)$ の自然表現がスピノール表現であった）．つまり左からの作用は第一成分の W_{2m} へ，右からの作用は第二成分の $W_{2m}^* \simeq W_{2m}$ への作用である．言いかえると $\mathbb{C}l_{2m} \otimes \mathbb{C}l_{2m}$ の $W_{2m} \otimes W_{2m}^*$ への作用は次と同値である．

$$(\mathbb{C}l_{2m} \otimes \mathbb{C}l_{2m}) \times \mathbb{C}l_{2m} \ni (\phi_1 \otimes \phi_2, v) \mapsto \phi_1 v \phi_2^t \in \mathbb{C}l_{2m}.$$

特に，次のスピン群の表現として次の同型が成立する．

$$(\Delta_{2m}) \otimes (\Delta_{2m})^* = (\Delta_{2m}) \otimes \Delta_{2m}^* = 2(\Lambda^0 + \Lambda^1 + \Lambda^2 + \cdots \Lambda^{m-1}) + \Lambda_+^m + \Lambda_-^m$$

Remark 3.35. 左辺はスピン群を考える必要があるが，右辺はスピン群は必要ない．

さて，クリフォード代数 $\mathbb{C}l_{2m}$ には偶数奇数分解である $\mathbb{C}l_{2m}^0 \oplus \mathbb{C}l_{2m}^1$ が存在した．これは外積代数でいうと $\Lambda^{even} \oplus \Lambda^{odd}$ という分解に対応している．一方でホッジ作用素（または体積要素）による分解も存在した．ω により $\oplus\Lambda^*$ を ± 1 固有空間へ分解するのである（もちろん even-odd 分解とは異なり，代数的な構造は無視している）．例えば $\Lambda^p \oplus \Lambda^{2m-p}$ に ω は作用し $\omega^2 = 1$ であるので $\Lambda^p \oplus \Lambda^{2m-p} = V(1) \oplus V(-1)$ と分解する．これらの二つの分解の違いを見たい．

まず**体積要素による分解**は体積要素を左から書けるという分解であり，$W_{2m} \otimes W_{2m}^*$ の**手前の** W_{2m} **を** ± 1 **固有分解する**ことになる．よって体積要素による分解は

$$\mathbb{C}l_{2m} = (\Delta_{2m}^+ \oplus \Delta_{2m}^-) \otimes \Delta_{2m} = (\Delta_{2m}^+ \otimes \Delta_{2m}) \oplus (\Delta_{2m}^- \otimes \Delta_{2m})$$

という分解である．実際，$\Delta_{2m}^+ \otimes \Delta_{2m}$ の中には $\Delta_{2m}^+ \otimes \Delta_{2m}^+$ の top な既約成分として $(1_m) = 2 \times ((1/2)_m)$ を highest weight にもつ Λ_+^m を含む．一方 $\Delta_{2m}^- \otimes \Delta_{2m}$ は Λ_-^m を含む．

次に even-odd 分解について見てみよう．これは $\alpha : \mathbb{C}l_{2n} \to \mathbb{C}l_{2n}$ による ± 1 固有空間分解である．これを ω を使って書いてみる．

$$\mathbb{C}l_{2n} \ni \phi \mapsto \omega\phi\omega^t = -\omega\phi\omega \in \mathbb{C}l_{2n}$$

を考えると α と一致する．

Proof. $\omega^2 = 1$ であり，$n = 2m$ のときは $\omega e_i = -e_i\omega$ であった．そこで

$$-\omega e_i \omega = \omega\omega e_i = e_i, \quad -\omega e_i e_j \omega = -\omega\omega e_i e_j = -e_i e_j$$

となることから α と一致する． ■

よって **even-odd 分解をするには．$W_{2m} \otimes W_{2m}^*$ の ω による前者の W_{2m} の分解と後者の W_{2m}^* の分解の両方を使う必要がある**．さらに注意すべきは W_{2m}^* と W_{2m} への $\mathbb{Z}_2$-grading は m によって異なるのであった．

1. $n = 4l$ のとき，$\Delta_{4l}^{\pm} \simeq (\Delta_{4l}^{\pm})^*$ であったので

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}l_{4l} &= (\Delta_{4l}^+ \oplus \Delta_{4l}^-) \otimes (\Delta_{4l}^+ \oplus \Delta_{4l}^-) \\
&= \{(\Delta_{4l}^+ \otimes \Delta_{4l}^+) \oplus (\Delta_{4l}^- \otimes \Delta_{4l}^-)\} \oplus \{(\Delta_{4l}^+ \otimes \Delta_{4l}^-) \oplus (\Delta_{4l}^- \otimes \Delta_{4l}^+)\} \\
&= \mathbb{C}l_{4l}^0 \oplus \mathbb{C}l_{4l}^1
\end{aligned}$$

となる．実際 highest weight を考えると $\mathbb{C}l_{4l}^0 = (\Delta_{4l}^+ \otimes \Delta_{4l}^+) \oplus (\Delta_{4l}^- \otimes \Delta_{4l}^-)$ は $\Lambda_+^{2l}, \Lambda_-^{2l}$ を含む．

2. $n = 4l + 2$ のとき，$\Delta_{4l+2}^{\mp} \simeq (\Delta_{4l+2}^{\pm})^*$ であったので

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}l_{4l+2} &= (\Delta_{4l+2}^+ \oplus \Delta_{4l+2}^-) \otimes ((\Delta_{4l+2}^+)^* \oplus (\Delta_{4l+2}^-)^*) \\
&= \{(\Delta_{4l+2}^+ \otimes (\Delta_{4l+2}^+)^*) \oplus (\Delta_{4l+2}^- \otimes (\Delta_{4l+2}^-)^*)\} \\
&\quad \oplus \{(\Delta_{4l+2}^+ \otimes (\Delta_{4l+2}^-)^*) \oplus (\Delta_{4l+2}^- \otimes (\Delta_{4l+2}^+)^*)\} \\
&= \{(\Delta_{4l+2}^+ \otimes \Delta_{4l+2}^-) \oplus (\Delta_{4l+2}^- \otimes \Delta_{4l+2}^+)\} \oplus \{(\Delta_{4l+2}^+ \otimes \Delta_{4l+2}^+) \oplus (\Delta_{4l+2}^- \otimes \Delta_{4l+2}^-)\} \\
&= \mathbb{C}l_{4l+2}^0 \oplus \mathbb{C}l_{4l+2}^1
\end{aligned}$$

となる．上とは逆に $\mathbb{C}l_{4l+2}^1 = (\Delta_{4l+2}^+ \otimes \Delta_{4l+2}^+) \oplus (\Delta_{4l+2}^- \otimes \Delta_{4l+2}^-)$ が $\Lambda_+^{2l+1}, \Lambda_-^{2l+1}$ を含む．

以上の事実は指数定理（スピン幾何入門４）において使用する．

3.4.5 $U(n)$ の表現空間の幾何構造

ここでの議論は後で必要としないので，興味がなければ飛ばして先に進んだほうが良い．

いままでの議論から $Spin(n)$, $Sp(n)$ という古典型リー群の表現空間上の幾何構造について議論した．そこで $U(n)$ や $SU(n)$ の既約表現空間には実構造または四元数構造は入るのであろうか？

$U(n)$ の既約表現空間には $U(n)$ 不変幾何構造（実または四元数構造）が入るかについて議論しよう．V_ρ の双対表現を考えると，その highest weight は，

$$(-\rho^n, -\rho^{n-1}, \cdots, -\rho^1)$$

である．これらが一致するためには

$$-\rho^n = \rho^1, \quad -\rho^{n-1} = \rho^2, \quad \cdots,$$

となる．そこで

Proposition 3.21. V_ρ を $U(n)$ の既約表現空間とする．

1. $n = 2m$ の場合には，*highest weight* ρ が

$$(\lambda^1, \lambda^2, \cdots, \lambda^{m-1}, \lambda^m, -\lambda^m, -\lambda^{m-1}, \cdots, -\lambda^1)$$

   のような表現なら $V_\rho \simeq V_\rho^*$ となる．

2. $n = 2m+1$ の場合には，*highest weight* ρ が

$$(\lambda^1, \lambda^2, \cdots, \lambda^{m-1}, \lambda^m, 0, -\lambda^m, -\lambda^{m-1}, \cdots, -\lambda^1)$$

   なら $V_\rho \simeq V_\rho^*$ となる．

さて $\Lambda^{0,p}$ は $(1_p, 0_{n-p})$ を highest weight にもつ既約表現であった．任意の既約表現はこれらのテンソル積表現の top の既約成分として実現される．実際，$\Lambda^{0,p} = (1_p, 0_{n-p})$ とすれば,

$$\rho = (\rho^1, \cdots, \rho^n) = \sum_{p=1}^{n-1} (\rho^p - \rho^{p+1}) \Lambda^{0,p} + \rho^n \Lambda^{0,n}$$

とかける．ここで $\rho^p - \rho^{p+1} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，$\rho^n \in \mathbb{Z}$ となる．$\Lambda^{0,p} \otimes \Lambda^{n,0} \simeq (\Lambda^{0,n-p})^*$ であったので，$(\Lambda^{0,p} \otimes \Lambda^{n,0} \oplus \Lambda^{0,n-p})$ という表現空間には不変四元数構造または不変実構造（どちらでも入る）を入れることが出来る．よって $(\Lambda^{0,p} \otimes \Lambda^{n,0} \oplus \Lambda^{0,n-p}) \otimes (\Lambda^{0,p} \otimes \Lambda^{n,0} \oplus \Lambda^{0,n-p})$ には不変実構造が入る．これを

$$\Lambda^{0,p} + \Lambda^{n,0} + \Lambda^{0,n-p}$$

という highest weight をもつ既約成分に制限すれば零でない不変実構造が入ることがわかる．

Proof. $V \oplus V^*$ に交代形式または対称形式が入っていたとする．このとき

$$(V \oplus V^*) \otimes (V \oplus V^*) = V \otimes V \oplus V^* \otimes V^* \oplus V \otimes V^* \oplus V^* \otimes V$$

となる．ここには対称形式

$$\Omega((e_1 + f_1) \otimes (e_2 + f_2), (e_3 + f_3) \otimes (e_4 + f_4)) = (f_1(e_3) \pm f_3(e_1))(f_2(e_4) \pm f_4(e_4))$$

が入る．これを $V \otimes V^* \simeq V^* \otimes V$ 上の対称形式として

$$\Omega(f_1 \otimes e_2, e_3 \otimes f_4) = \pm f_1(e_3)(f_4(e_4))$$

として，不変対称形式が入る．top な既約成分へ制限しても零でないこともわかる． ■

そこで，まず $n=2m$ の場合に $V_\rho \simeq V_\rho^*$ として，その highest weight を書きかえると

$$
\begin{aligned}
\rho =&(\lambda^1-\lambda^2)\Lambda^{0,1}+\cdots+(\lambda^{m-1}-\lambda^m)\Lambda^{0,m-1}\\
&+2\lambda^m\Lambda^{0,m}\\
&+(\lambda^{m-1}-\lambda^m)\Lambda^{0,m+1}+(\lambda^{m-2}-\lambda^{m-1})\Lambda^{0,m+2}+\cdots+(\lambda^1-\lambda^2)\Lambda^{0,2m-1}-\lambda^1\Lambda^{0,2m}\\
=&(\lambda^1-\lambda^2)\Lambda^{0,1}+\cdots+(\lambda^{m-1}-\lambda^m)\Lambda^{0,m-1}\\
&+2\lambda^m\Lambda^{0,m}\\
&+(\lambda^{m-1}-\lambda^m)\Lambda^{0,m+1}+(\lambda^{m-2}-\lambda^{m-1})\Lambda^{0,m+2}+\cdots+(\lambda^1-\lambda^2)\Lambda^{0,2m-1}\\
&+\{(\lambda^1-\lambda^2)+(\lambda^2-\lambda^3)+\cdots+(\lambda^{m-1}-\lambda^m)+\lambda^m\}\Lambda^{2m,0}\\
=&(\lambda^1-\lambda^2)(\Lambda^{0,1}+\Lambda^{2m,0}+\Lambda^{0,2m-1})+\cdots+\lambda^m(\Lambda^{0,m}+\Lambda^{2m,0}+\Lambda^{0,m})
\end{aligned}
$$

とすれば V_ρ 上には不変実構造が入ることがわかる．

同様に，$n=2m+1$ の場合に

$$
\begin{aligned}
\rho =&(\lambda^1-\lambda^2)\Lambda^{0,1}+\cdots+(\lambda^{m-1}-\lambda^m)\Lambda^{0,m-1}\\
&+\lambda^m\Lambda^{0,m}+\lambda^m\Lambda^{0,m+1}\\
&+(\lambda^{m-1}-\lambda^m)\Lambda^{0,m+2}+(\lambda^{m-2}-\lambda^{m-1})\Lambda^{0,m+3}+\cdots+(\lambda^1-\lambda^2)\Lambda^{0,2m}-\lambda^1\Lambda^{0,2m+1}\\
=&(\lambda^1-\lambda^2)\Lambda^{0,1}+\cdots+(\lambda^{m-1}-\lambda^m)\Lambda^{0,m-1}\\
&+\lambda^m\Lambda^{0,m}+\lambda^m\Lambda^{0,m+1}\\
&+(\lambda^{m-1}-\lambda^m)\Lambda^{0,m+2}+(\lambda^{m-2}-\lambda^{m-1})\Lambda^{0,m+3}+\cdots+(\lambda^1-\lambda^2)\Lambda^{0,2m}\\
&-\{(\lambda^1-\lambda^2)+(\lambda^2-\lambda^3)+\cdots+(\lambda^{m-1}-\lambda^m)+\lambda^m\}\Lambda^{0,2m+1}
\end{aligned}
$$

であるので，V_ρ 上には不変実構造が入る．

次に $SU(n)$ の場合を考える．これは $U(n)$ の場合とほとんど同様である．$SU(n)$ の場合には $\Lambda^{0,p}\simeq(\Lambda^{0,n-p})^*$ を使えばよい．この同型は具体的には $\phi\in\Lambda^{0,p},\psi\in\Lambda^{0,n-p}$ に対して，

$$\phi\wedge\psi=\langle\phi,\psi\rangle\epsilon_1\wedge\cdots\epsilon_n$$

として $\Lambda^{0,p}$ と $\Lambda^{0,n-p}$ の pairing を作る．これが $SU(n)$ 不変であることはすぐにわかる．$U(n)$ との違いは $n=2m$ の時には $\Lambda^{0,m}\simeq(\Lambda^{0,m})^*$ となることである．**特に $n=4m$ の時には $\Lambda^{0,2m}$ には不変対称形式よって不変実構造が入り，$n=4m+2$ の時には $\Lambda^{0,2m+1}$ には不変交代形式よって不変四元数構造が入る**ことである．このことに注意して $U(n)$ の場合と同様の議論をすればよい．

Example 3.22. $SU(2)$ の表現空間 $\Lambda^{0,1}=\mathbb{H}$ には不変四元数構造が入った．しかし $U(2)$ の表現空間としては不変四元数構造は入らない．$U(2)$ の既約表現 with highest weight $(k,-k)$ には実構造が入ったが，対応する $SU(2)$ の highest weight は $(2k)$ であり，表現空間は $S^{2k}(\mathbb{H})$ となり実構造が入る．

3.5　半四元数エルミート構造と $Sp(n)Sp(1)$

3.5.1　半四元数構造

この章では，$Sp(n)Sp(1) \subset SO(4n)$ について見ていく．$Sp(n)Sp(1)$ は次で定義されるリー群である．

$$Sp(n)Sp(1) := (Sp(1) \times Sp(n))/\mathbb{Z}_2$$

ここで $Sp(n)Sp(1)$ は $U(n)$ に含まれないことに注意する（これは四元数ケーラー多様体はケーラーとはならないことの理由である）．また $Sp(n)$ の中心は ± 1 であるので $(1,1), (-1,-1)$ を $\mathbb{Z}_2$ とみなしている．

このリー群はユークリッド空間に四元数エルミート構造より弱い，半四元数エルミート構造（semi-quternionic structure）を不変にするものである．(半四元数構造は [4] を参照）

まず半四元数構造を定義しよう．V を実ベクトル空間として $\mathrm{End}(V)$ **の** $\mathbb{R}$ **上部分代数** Q **で** $\mathrm{id} \in Q$ **かつ** $\mathbb{R}$ **上代数同型** $Q \simeq \mathbb{H}$ **となるものを半四元数構造**とよぶ．

Example 3.23. $\mathbb{R}^{4n} = \mathbb{H}^n$ を考える．右から $\mathbb{H}$ をかけることにより $\mathbb{H} \subset \mathrm{End}(V)$ と考えら得る．つまり，

$$\mathbb{H}^n \ni v \mapsto v\bar{q} \in \mathbb{H}^n, \quad q \in \mathbb{H}$$

よって $(\mathbb{H}^n, Q = \mathbb{H})$ は半四元数構造をもつベクトル空間である．

Example 3.24. $\mathbb{H}^n$ の $q \in \mathbb{H}$ の作用を，$p_o \in Sp(1)$ でねじって，

$$\mathbb{H}^n \ni x \mapsto x\overline{p_0 q p_0^{-1}} = xp_0\bar{q}p_0^{-1} \in \mathbb{H}^n$$

とする．$p_0\mathbb{H}p_0^{-1} = \mathbb{H} \subset \mathrm{End}(V)$，$p_0 \mathrm{id} p_0^{-1} = \mathrm{id} \in p_0\mathbb{H}p_0^{-1}$，代数同型 $p_0\mathbb{H}p_0^{-1} \simeq \mathbb{H}$ が成立するので，$(\mathbb{H}^n, p_0\mathbb{H}p_0^{-1})$ は半四元数構造をもつベクトル空間である．

この例をみればわかるように半四元数構造とは，同型 $Q \simeq \mathbb{H}$ を固定してしまえば，単に四元数構造のことである．重要なのは次の半四元数線形写像の概念である．(V, Q) の**半四元数線形写像とは，実線形写像** $f : V \to V$ **で，ある** $f^Q : Q \to Q$ **という代数同型が存在して** $f(qv) = f^Q(q)f(v)$ **となるもの**である．

Remark 3.36. $f^Q : Q \to Q$ を f によらず $\mathrm{id} : Q \to Q$ としたものが，四元数線形写像である．つまり $f : V \to V$ で $f(qv) = qf(v)$ となるものである．この意味で半四元数線形写像とは四元数線形写像の一般化である．

ある半四元数ベクトル空間 (V, Q) を考えて，半四元数線形変換群の全体がどうなるかを見たい．$Q \simeq \mathbb{H}$ を一つ固定して $Q = \mathbb{H}$ とみなす．このとき代数同型 $g : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ はどうような形になるであろうか？$\mathbb{H}$ は $\mathbb{R}$ 上代数であるので $\mathbb{R}1 \subset \mathbb{H}$ は固定される．つまり $g(a1) = ag(1) = a$ である（$a \in \mathbb{R}$）．そこで $\Im\mathbb{H} = \mathbb{R}^3$ の線形変換が問題となるが，ちょっと考えれば代数構造を保つ変換は $SO(3)$ であるこ

とがわかる．そこで $Sp(1) = SU(2) \mapsto SO(3)$ を考えて，$g : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ **が代数同型なら，ある** $p \in Sp(1)$ **が存在して**

$$g : \mathbb{H} \ni q \mapsto g(q) = pqp^{-1} \in \mathbb{H}$$

となることがわかる．

簡単のため (V, Q) を $(\mathbb{H}^n, \mathbb{H})$ とみなす．この半四元数線形写像 f に対して $p \in Sp(1)$ が存在して，$f(v\bar{q}) = f(v)p\bar{q}p^{-1}$ となる．そこで $f'(v) := f(v)p$ とすると，

$$f'(v\bar{q}) = f(v\bar{q})p = f(v)p\bar{q}p^{-1}p = f(v)p\bar{q} = f'(v)\bar{q}$$

となり，f' は四元数線形写像である．つまり $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{H})$ が存在して $f'(v) = Av$ となる．以上から，$(\mathbb{H}^n, \mathbb{H})$ の半四元数線形写像は $f(v) = Avp^{-1}$ とかける．特に，半四元数線形変換群は $GL(n, \mathbb{H})Sp(1)$ である．

さらに**半四元数エルミート構造**とは (V, Q) に正定値内積が入っていて，半四元数構造 Q が内積を保つもの．つまり $\forall q \in Q$ に対して $\langle qu, v\rangle = \langle u, \bar{q}v\rangle$ となる内積が入っているときである．ここで $Q \simeq \mathbb{H}$ であるので $Q = \mathbb{R} \oplus \Im Q$ とかけるが，$\bar{q}$ とは実部はそのままで虚部をマイナス倍したものである．

Remark 3.37. 四元数エルミート構造とは $\langle Iu, Iv\rangle = \langle u, v\rangle$, $\langle Ju, Jv\rangle = \langle u, v\rangle$, $\langle Ku, Kv\rangle = \langle u, v\rangle$ であったが，これは $\forall q \in \mathbb{H}$ に対して $\langle qu, v\rangle = \langle u, \bar{q}v\rangle$ と同値である．

そこで半四元数エルミート構造を保つ変換を考えると，それは $Sp(n)Sp(1)$ となることがすぐにわかる．

Proposition 3.22. $(V, Q, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ を半四元数エルミートベクトル空間とする．このとき**半四元数エルミート構造を保つ半四元数線形変換の全体の群は** $Sp(n)Sp(1)$ **と同型**である．

3.5.2 $E - H$ formulation

ベクトル空間 $(V, Q, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ に対するよい基底は何であろうか？ $Sp(n)$, $Sp(1)$ それぞれに対してのよい基底はシンプレクティックユニタリ基底であった．$(V, Q, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ に対するよい基底を構成するためには，これらシンプレクティックユニタリ基底を使う．$Sp(n)$ の自然表現空間を $(E, \sigma_E, \mathfrak{J})$ とする．つまり E は複素 $2n$ 次元ベクトル空間，σ_E は複素シンプレクティック形式，$\mathfrak{J}$ は compatible な四元数構造である $(\sigma_E(\epsilon, \epsilon') = \overline{\sigma_E(\mathfrak{J}\epsilon, \mathfrak{J}\epsilon')}, \sigma(\epsilon, \mathfrak{J}\epsilon) > 0, \forall\epsilon \neq 0)$．このシンプレクティックユニタリ基底を

$$\{\epsilon_\alpha | \alpha = \pm 1, \cdots, \pm n\}$$

とする．同様に $(H, \sigma_H, \mathfrak{J})$ を $Sp(1)$ の自然表現として，シンプレクティックユニタリ基底を

$$\{h_A | A = \pm\}$$

とする．このとき $E\otimes H$（複素 $4n$ 次元ベクトル空間）を考えると $Sp(n)Sp(1)$ はこの空間に作用する．

この空間に入る構造は次のような構造である．

1. $\mathfrak{J}\otimes\mathfrak{J}$ **という実構造が入る**．この実部を $(E\otimes H)^{\Re}$ と書く．しかし $\mathfrak{J}(\epsilon_\alpha\otimes h_A)=\mathrm{sign}(\alpha A)\epsilon_{-\alpha}\otimes h_{-A}$ となるので $\epsilon_\alpha\otimes h_A\notin(E\otimes H)^{\Re}$ である．

2. $\sigma_E\otimes\sigma_H$ を考えるとこれは**複素内積である．さらに** $(E\otimes H)^{\Re}$ **へ制限すると正定値内積**である．
$$(\sigma_E\otimes\sigma_H)(\epsilon_\alpha\otimes h_A,\epsilon_\beta\otimes h_B)=\mathrm{sign}(\alpha A)\delta_{\alpha,-\beta}\delta_{A,-B}$$

3. $h_E(\epsilon,\epsilon')=\sigma_E(\epsilon,\mathfrak{J}\epsilon')$ により E にエルミート内積が入る．同様に H にもエルミート内積 h_H が入る．これらをテンソル積して $E\otimes H$ にはエルミート内積 $h:=h_H\otimes h_E$ が入る．
$$h(\epsilon_\alpha\otimes h_A,\epsilon_\beta\otimes h_B)=(\sigma_E\otimes\sigma_H)(\epsilon_\alpha\otimes h_A,\mathfrak{J}(\epsilon_\beta\otimes h_B))$$
$$=\mathrm{sign}(\beta B)(\sigma_E\otimes\sigma_H)(\epsilon_\alpha\otimes h_A,\epsilon_{-\beta}\otimes h_{-B}))=\delta_{\alpha,\beta}\delta_{A,B}$$
となるので $\{\epsilon_\alpha\otimes h_A\}$ は**ユニタリ基底**である．

またこれらの構造を $Sp(n)Sp(1)$ は不変にする．実はこの空間 $E\otimes H$ が $(V,Q,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ の複素化である．

Proposition 3.23. $(V,Q,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ とする．このベクトル空間を複素化したものは $E\otimes H$ と同型である．さらに内積を複素化したものは $\sigma_E\otimes\sigma_H$ に等しい．

Remark 3.38. このように E,H を使って議論することを Salamon による $E-H$-formulation などとよぶ．[4],[7] を参照．

Proof. すべて座標で書いて証明する．まず $E\otimes H$ を $2n\times 2$ の複素行列として書いてみよう．$(z,w)\in E$, $(\alpha,\beta)\in H$ に対して，四元数構造は以前みたように
$$(z,w)\mapsto(-\bar{w},\bar{z}),\quad(\alpha,\beta)\mapsto(-\bar{\beta},\bar{\alpha})$$
である．これらをテンソルを
$$(z,w)\otimes(\alpha,\beta)=\begin{pmatrix}z\alpha & z\beta\\ w\alpha & w\beta\end{pmatrix}$$
として $E\otimes H$ の座標を $2n\times 2$ 行列とみなす．ここで z,w は n 次元縦ベクトルとしている．四元数構造はテンソル積は実構造を次のように与える．
$$\begin{pmatrix}z\alpha & z\beta\\ w\alpha & w\beta\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}\bar{w}\bar{\beta} & -\bar{w}\bar{\alpha}\\ -\bar{z}\bar{\beta} & \bar{z}\bar{\alpha}\end{pmatrix}$$

つまり $E\otimes H$ の座標を
$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ w_1 & w_2 \end{pmatrix}$$
として，実構造を
$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ w_1 & w_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{w}_2 & -\bar{w}_1 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix}$$
でいれる．このとき実部は
$$\begin{pmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{pmatrix}$$
となる．そこで $z+\mathbf{j}w$ を $\mathbb{H}^n$ の座標とみなすのである．このようにして $(E\otimes H)^{\Re}=\mathbb{H}^n$ がわかる．そしてその複素化を考えると $E\otimes H=\mathbb{H}^n\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ となる．

　このときの $Sp(n)Sp(1)$ の作用を考えよう．$A+\mathbf{j}B\in Sp(n)\subset GL(n,\mathbb{H})$, $\alpha+\mathbf{j}\beta\in Sp(1)\subset GL(n,\mathbb{H})$ としたとき，

$$(z+\mathbf{j}w)(\bar{\alpha}-\bar{\beta}\mathbf{j})=(z\bar{\alpha}+\bar{w}\beta)+\mathbf{j}(-\bar{z}\beta+w\bar{\alpha})$$

などを考慮すれば，作用は

$$\begin{pmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} A & -\bar{B} \\ B & \bar{A} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\beta} \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

となる．よって，$Sp(n)Sp(1)$ の表現空間として，$(E\otimes H)^{\Re}=\mathbb{H}^n$ であることがわかる．

　さて内積について見てみよう．E, H には複素シンプレクティック構造が入るのであったが，それらは

$$\sigma_E((z,w),(z',w'))=zw'-wz'$$

として入る（正確には $z^tw'-w^tz'$ である）．このシンプレクティック構造は四元数構造と compatible である．実際

$$\sigma_E((-\bar{w},\bar{z}),(-\bar{w}',\bar{z}'))=-\bar{w}\bar{z}'+\bar{z}\bar{w}'=\overline{\sigma_E((z,w),(z',w'))}$$

および，
$$\sigma_E((z,w),(-\bar{w},\bar{z}))=z\bar{z}+w\bar{w}>0 \quad (z,w)\neq(0,0)$$
が成立する．そこで $\sigma_E\otimes\sigma_H$ を考えると

$$\begin{aligned}
&(\sigma_E\otimes\sigma_H)((z,w)\otimes(\alpha,\beta),(z',w')\otimes(\alpha',\beta'))\\
=&(zw'-wz')(\alpha\beta'-\beta\alpha')\\
=&(z\alpha)(w'\beta')-(z\beta)(w'\alpha')-(w\alpha)(z'\beta')+(w\beta)(z'\alpha')
\end{aligned}$$

となるので，$E \otimes H$ 上で複素内積は

$$
\begin{aligned}
&(\sigma_E \otimes \sigma_H)(\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ w_1 & w_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1' & z_2' \\ w_1' & w_2' \end{pmatrix}) \\
=& z_1 w_2' + w_2 z_1' - z_2 w_1' - w_1 z_2'
\end{aligned}
$$

となる．また

$$
\begin{aligned}
&(\sigma_E \otimes \sigma_H)(\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ w_1 & w_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ w_1 & w_2 \end{pmatrix}) \\
=& 2(z_1 w_2 - z_2 w_1)
\end{aligned}
$$

であるので，行列式の 2 倍みたいなものである．実部に制限すれば

$$
\begin{aligned}
&(\sigma_E \otimes \sigma_H)(\begin{pmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z' & -\bar{w}' \\ w' & \bar{z}' \end{pmatrix}) \\
=& z\bar{z}' + \bar{z}z' + \bar{w}w' + w\bar{w}'
\end{aligned}
$$

となるので $\mathbb{H}^n$ 上の正定値内積と一致する． ■

3.5.3 クリフォード代数と $\mathfrak{sp}(n) \oplus \mathfrak{sp}(1)$

さてクリフォード代数内に $Sp(n)Sp(1)$ のリー環を実現してみよう．難しさは $\epsilon_\alpha \otimes h_A$ が $(E \otimes H)^{\Re}$ に入らないことである．しかし複素クリフォード代数には入っていることになり，関係式は

$$(\epsilon_\alpha \otimes h_A)(\epsilon_\beta \otimes h_B) + (\epsilon_\beta \otimes h_B)(\epsilon_\alpha \otimes h_A) = -2\mathrm{sign}(\alpha A)\delta_{\alpha-\beta}\delta_{A-B}$$

である．

そこで，

$$a_\alpha^\dagger = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\epsilon_\alpha \otimes h_+, \quad a_\alpha = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\mathrm{sign}(\alpha)\epsilon_{-\alpha} \otimes h_-$$

とすれば,

$$[a_\alpha^\dagger, a_\beta^\dagger]_+ = 0, \quad [a_\alpha, a_\beta]_+ = 0$$

および

$$
\begin{aligned}
&[a_\alpha^\dagger, a_\beta]_+ = a_\alpha^\dagger a_\beta + a_\beta a_\alpha^\dagger \\
=& -1/2\{(\epsilon_\alpha \otimes h_+)(\mathrm{sign}(\beta)\epsilon_{-\beta} \otimes h_-) + (\mathrm{sign}(\beta)\epsilon_{-\beta} \otimes h_-)(\epsilon_\alpha \otimes h_+)\} = \delta_{\alpha\beta}
\end{aligned}
$$

となる．また

$$\mathfrak{J}(a_\alpha^\dagger) = -\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\mathrm{sign}(\alpha)\epsilon_{-\alpha}\otimes h_- = -a_\alpha, \quad \mathfrak{J}(a_\alpha) = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\mathrm{sign}(\alpha)\mathrm{sign}(-\alpha)\epsilon_\alpha \otimes h_+ = -a_\alpha^\dagger$$

となるので，これまでみてきた複素共役写像となる．

$a^\dagger_\alpha, a_\alpha$ を生成元とし，関係式を上のように入れたものが $\mathbb{C}l_{4n}$ となり，$\mathfrak{spin}(4n,\mathbb{C})$ は以前と同様にしてつくればよい．そこで $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{sp}(1,\mathbb{C})$ を $\mathfrak{spin}(4n,\mathbb{C})$ にどうやって埋め込むかが問題となってくる．

$\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$ **は以前と同様にして構成する**.

$$x_{\alpha\beta}\mapsto a^\dagger_\alpha a_\beta-\mathrm{sign}(\alpha\beta)a^\dagger_{-\beta}a_{-\alpha}=-a_\beta a^\dagger_\alpha+\mathrm{sign}(\alpha\beta)a_{-\alpha}a^\dagger_{-\beta}$$

である．実際，$x_{\alpha\beta}(\epsilon_\gamma)=\delta_{\beta\gamma}\epsilon_\alpha+\mathrm{sign}(\gamma\beta)\delta_{-\alpha\gamma}\epsilon_{-\beta}$ であったが，

$$\begin{aligned}
&[a^\dagger_\alpha a_\beta-\mathrm{sign}(\alpha\beta)a^\dagger_{-\beta}a_{-\alpha},\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\epsilon_{-\gamma}\otimes h_-]\\
=&[a^\dagger_\alpha a_\beta-\mathrm{sign}(\alpha\beta)a^\dagger_{-\beta}a_{-\alpha},\mathrm{sign}(\gamma)a_\gamma]\\
=&[-a_\beta a^\dagger_\alpha+\mathrm{sign}(\alpha\beta)a_{-\alpha}a^\dagger_{-\beta},\mathrm{sign}(\gamma)a_\gamma]\\
=&-\delta_{\alpha\gamma}\mathrm{sign}(\gamma)a_\beta-\mathrm{sign}(\alpha)\delta_{-\beta\gamma}a_{-\alpha}\\
=&-\delta_{\alpha\gamma}\mathrm{sign}(\gamma)\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\mathrm{sign}(\beta)\epsilon_{-\beta}\otimes h_-+\delta_{-\beta\gamma}\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\epsilon_\alpha\otimes h_-\\
=&\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}(\delta_{\beta-\gamma}\epsilon_\alpha+\delta_{-\alpha-\gamma}\mathrm{sign}(-\gamma\beta)\epsilon_{-\beta})\otimes h_-
\end{aligned}$$

となるので，$x_{\alpha\beta}$ の $\mathfrak{spin}(4n,\mathbb{C})\subset\mathbb{C}l_{4n}$ で実現したものを ad 表現すれば，$E\otimes H$ の E の部分へ自然表現になっている．$[a^\dagger_\alpha a_\beta-\mathrm{sign}(\alpha\beta)a^\dagger_{-\beta}a_{-\alpha},a^\dagger_\gamma]$ を考えても同様である．

一方で $\mathfrak{sp}(1,\mathbb{C})$ の基底を $\{y_{AB}|A+B\geq 0,A,B=\pm1\}$ とすれば，自然表現は

$$y_{AB}(h_C)=\delta_{BC}h_A+\mathrm{sign}(BC)\delta_{-AC}h_{-B}$$

で与えられる．つまり

$$\begin{aligned}
&y_{++}(h_+)=h_+,\quad y_{++}(h_-)=-h_-\quad y_{++}=-y_{--}\\
&y_{+-}(h_+)=0,\quad y_{+-}(h_-)=2h_+\\
&y_{-+}(h_+)=2h_-,\quad y_{-+}(h_-)=0,
\end{aligned}$$

となる．関係式は

$$[y_{+-},y_{-+}]=4y_{++},\quad [y_{++},y_{+-}]=2y_{+-},\quad [y_{++},y_{-+}]=-2y_{-+}$$

である．**そこで**

$$\begin{aligned}
y_{+-}&\mapsto-\sum\mathrm{sign}(\alpha)a^\dagger_\alpha a^\dagger_{-\alpha}=-2\sigma\\
y_{-+}&\mapsto\sum\mathrm{sign}(\alpha)a_\alpha a_{-\alpha}=-2\sigma^*\\
y_{++}&\mapsto\sum a^\dagger_\alpha a_\alpha-n=N-n=[\sigma,\sigma^*]
\end{aligned}$$

とすればよい. 実際

$$[-\sum \mathrm{sign}(\alpha)a_\alpha^\dagger a_{-\alpha}^\dagger, \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\mathrm{sign}(\beta)\epsilon_{-\beta}\otimes h_-] = [-\sum \mathrm{sign}(\alpha)a_\alpha^\dagger a_{-\alpha}^\dagger, a_\beta]$$
$$= -\sum \mathrm{sign}(\alpha)(-\delta_{\alpha\beta}a_{-\alpha}^\dagger + \delta_{-\alpha\beta}a_\alpha^\dagger) = 2\mathrm{sign}(\beta)a_{-\beta}^\dagger$$
$$=\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\mathrm{sign}(\beta)\epsilon_{-\beta}\otimes 2h_+$$

や

$$[\sum \mathrm{sign}(\alpha)a_\alpha a_{-\alpha}, \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\epsilon_\beta\otimes h_+] = [\sum \mathrm{sign}(\alpha)a_\alpha a_{-\alpha}, a_\beta^\dagger] = -2\mathrm{sign}(\beta)a_{-\beta}$$
$$=\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\epsilon_\beta\otimes 2h_-$$

などが成立するので $\mathfrak{sp}(1,\mathbb{C})\subset\mathfrak{spin}(4n,\mathbb{C})$ であり ad 表現すれば H への自然表現を与えている.

また実部をとれば, $\mathfrak{sp}(n)\oplus\mathfrak{sp}(1)\subset\mathfrak{spin}(4n)$ となる.

Proof. 問題となるのは $\mathfrak{sp}(1)$ の方である. この基底は $\sqrt{-1}y_{++}, y_{+-}-y_{-+}, \sqrt{-1}(y_{+-}+y_{-+})$ であるが, クリフォード代数内で実現した場合には,

$$\sqrt{-1}(\sum a_\alpha^\dagger a_\alpha - n), \quad -2(\sigma^*-\sigma), \quad 2\sqrt{-1}(\sigma^*+\sigma)$$

となる. これらの共役をとれば不変であることがわかるので $\mathfrak{spin}(4n)$ に入る. ■

そこで指数写像で飛ばしたときに $Sp(n)Sp(1)$ になるかが問題となってくる.

3.5.4 $Sp(n)Sp(1)$ とスピン群

$Sp(n)Sp(1)$ の普遍被覆群として $Sp(1)\times Sp(n)$ をとることができる.

$$0\to\mathbb{Z}_2\to Sp(1)\times Sp(n)\to Sp(n)Sp(1)\to 1$$

この完全系列のホモトピー完全系列をとれば $\pi_1(Sp(n)Sp(1))=\mathbb{Z}_2$ であることがわかる. そこで

Proposition 3.24. 下の可換図式をみたす, **リフト F は n が偶数なら存在して, n が奇数なら存在しない**.

$$\begin{array}{ccc} & & Spin(4n) \\ & F\nearrow & \downarrow \mathrm{Ad} \\ Sp(n)Sp(1) & \xrightarrow{i} & SO(4n) \end{array}$$

Proof. $i_*(\pi_1(Sp(n)Sp(1)))$ を調べればよい．まず $\pi_1(Sp(n)Sp(1))$ の生成元を構成する．$Sp(1) \subset SU(2)$, $Sp(n) \subset SU(2n)$ としておく．このとき

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} e^{it}I & 0 \\ 0 & e^{-it}I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} \in Sp(n)Sp(1), \quad 0 \le t \le \pi$$
$$\tilde{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} e^{it}I & 0 \\ 0 & e^{-it}I \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} \in Sp(n) \times Sp(1) \quad 0 \le t \le \pi$$

とすれば $\gamma(\pi) = (-1)(-1) = 1$ となり，$\pi_1(Sp(n)Sp(1))$ に入る．さらに $\tilde{\gamma}(\pi) = (-1, -1)$ で $\tilde{\gamma}(t)$ は $\gamma(t)$ のリフトであるのでホモトピー完全系列を考えると $\gamma(t)$ が生成元であることがわかる．そこでこれを $SO(4n)$ 内で考えてみよう．行列表示を使って．

$$\begin{pmatrix} e^{it}I & 0 \\ 0 & e^{-it}I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{e^{it}} & 0 \\ 0 & \overline{e^{-it}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & -e^{-\bar{2}it}w \\ e^{-2it}w & \bar{z} \end{pmatrix}$$

となる．つまり $SO(4n)$ として書けば,

$$i_*(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} I_{2n} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} \cos 2t & -\sin 2t \\ \sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix} I_n \end{pmatrix}$$

となる．リー群の基本群に関しては $[\gamma\gamma'] = [\gamma][\gamma']$ が成立していた．また

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} \cos 2t & -\sin 2t \\ \sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

が生成元 $\beta = -1 \in \mathbb{Z}_2 = \pi_1(SO(4n))$ であった．よって $[i_*\gamma(t)] = n\beta$ となる．特に n が偶数なら $i_*(\pi_1(Sp(n)Sp(1))) = 0$ であり，n が奇数なら $i_*(\pi_1(Sp(n)Sp(1))) = \mathbb{Z}_2$ となる． ■

Remark 3.39. 実 $4n$ 次元四元数ケーラー多様体のホロノミー群 $Sp(n)Sp(1)$ が $Sp(n)\times Sp(1)$ へリフトするためには $w_2(S^2(\mathbb{H})^{\Re}) = 0$ となる必要がある（see [7]）．ここで $S^2(\mathbb{H})$ は複素 3 次元同伴束であり $S^2(\mathbb{H})^{\Re}$ はその実部である．このとき $w_2(M) = nw_2(S^2(\mathbb{H})^{\Re})$ であることがわかり,

$$w_2(M) = \begin{cases} 0 & n = even \\ w_2(S^2(\mathbb{H})^{\Re}) & n = odd \end{cases}$$

となる．よって n が奇数なら $w_2(S^2(\mathbb{H})^{\Re}) = 0$ と $w_2(M) = 0$ が同値である．しかし n が偶数の場合には $w_2(M) = 0$ だからといって $w_2(S^2(\mathbb{H})^{\Re}) = 0$ になるとは限らないが，n が偶数なら必ずスピン構造は存在する．

上の命題は n が偶数なら必ずスピン構造が存在するという事実の別証明である．

我々が構成したクリフォード代数内での $\mathfrak{sp}(n) \oplus \mathfrak{sp}(1)$ はクリフォード代数内での指数写像で移したとき n が奇数なら $Sp(n)Sp(1)$ にとはなりえないことがわかる．実際 $Sp(n) \times Sp(1)$ をスピン群内に作っているのである．それを確かめよう．まず次の命題は役に立つ

Proposition 3.25. $Spin(4n)$ は $SO(4n)$ の普遍被覆群であり $Sp(n) \times Sp(1)$ は $Sp(n)Sp(1)$ の普遍被覆群であることに注意する．このとき，下の可換図式をみたす，リフト F が唯一つ存在する．

$$\begin{array}{ccc} Sp(n) \times Sp(1) & \xrightarrow{F} & Spin(4n) \\ \downarrow & & \downarrow \mathrm{Ad} \\ Sp(n)Sp(1) & \xrightarrow{i} & SO(4n) \end{array}$$

また $F(-1,-1) = (-1)^n$ である．

Proof. 写像 $Sp(n) \times Sp(1) \to Sp(n)Sp(1) \xrightarrow{i} SO(4n)$ に対して Lemma 3.1 を使えばよい．そこで $F(-1,-1) = (-1)^n$ を確かめよう．n が偶数の場合には，F は $Sp(n)Sp(1)$ の写像におちるので $F(-1,-1) = 1$ である．n が奇数の場合には可換図式から $F(-1,-1) = \pm 1$ となる．$F(-1,-1) = 1$ とすれば，それは $Sp(n)Sp(1)$ の写像に落ちるが，そのようなものは存在しないことはすでに述べた．よって $F(-1,-1) = -1$ である．またこのとことから n **が奇数なら** F **は単射である**こともわかる． ■

そこで $G = \exp \mathfrak{sp}(n) \oplus \mathfrak{sp}(1) \subset Spin(4n)$ とすれば，次の可換図式が成立する．

$$\begin{array}{ccc} Spin(4n) \supset G & \xrightarrow{\mathrm{Ad}} & Sp(n)Sp(1) \subset SO(4n) \\ {\scriptstyle\exp}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\exp} \\ \mathfrak{spin}(4n) \supset \mathfrak{sp}(n) \oplus \mathfrak{sp}(1) & \xrightarrow{\mathrm{ad}} & \mathfrak{sp}(n) \oplus \mathfrak{sp}(1) \subset \mathfrak{so}(4n) \end{array}$$

$U(n)$ の場合と同様にして，この Ad は全射であることがわかる．よって G は $Sp(n)Sp(1)$ の被覆群を与えているが G は連結であるので，G は $Sp(n)Sp(1)$ または $Sp(n) \times Sp(1)$ となる．

さて $\mathfrak{sp}(n) \oplus \mathfrak{sp}(1)$ は以下の元を含む．

$$\sqrt{-1}(a_\alpha^\dagger a_\alpha - a_{-\alpha}^\dagger a_{-\alpha}) \quad (\alpha = \pm 1, \cdots, \pm n), \quad \sqrt{-1}(\sum_\alpha a_\alpha^\dagger a_\alpha - n)$$

実はこれが極大可換環 $\mathbb{T}$ の基底である．そこで

$$\sqrt{-1}(\sum_{1 \le k \le n} 2a_k^\dagger a_k - n)$$

という元を含む．これを指数写像で飛ばせば

$$\exp(\pi 2\sqrt{-1}(\sum a_k^\dagger a_k - n/2)) = \exp(\pi \sum_{k=1}^{n} e_{2k-1}e_{2k})$$
$$=(\cos\pi + e_1e_2\sin\pi)\cdots(\cos\pi + e_{2n-1}e_{2n}\sin\pi) = (-1)^n$$

となる．特に n が奇数なら $-1 \in G$ であるので G は $Sp(n)Sp(1)$ の二重被覆を与えるものであり $Sp(n)\times Sp(1)$ である．

n が偶数のときには $U(n)\subset Spin^c(2n)$ の時と同様にする．$T = \exp\mathbb{T}$ を極大トーラスとすれば，すべての元は gtg^{-1} とかける．よって，もし $-1 \in G$ であるなら，$-1 \in \exp\mathbb{T}$ となる．そこで

$$\begin{aligned}
&(\cos t_1 + e_1e_2\sin t_1)(\cos t_1 - e_{2n+1}e_{2n+2}\sin t_1)\cdots(\cos t_n + e_{2n-1}e_{2n}\sin t_n)(\cos t_n - e_{4n-1}e_{4n}\sin t_n)\\
&(\cos s + e_1e_2\sin s)\cdots(\cos s + e_{2n-1}e_{2n}\sin s)\\
=&(\cos(t_1+s) + e_1e_2\sin(t_1+s))(\cos t_1 - e_{2n+1}e_{2n+2}\sin t_1)\\
&\quad\cdots(\cos(t_n+s) + e_{2n-1}e_{2n}\sin(t_n+s))(\cos t_n - e_{4n-1}e_{4n}\sin t_n)\\
=&-1
\end{aligned}$$

となるには，

$$t_1 + s = \pm\pi, t_2 + s = \pm\pi, \cdots, t_n + s = \pm\pi, t_1 = \pm\pi, \cdots, t_n = \pm\pi$$

となり -1 となることはありえない．よって，$-1 \notin G$ である．以上から

Proposition 3.26. $\mathfrak{sp}(n)\oplus\mathfrak{sp}(1)$ を実クリフォード代数に実現したとき，

$$\exp\mathfrak{sp}(n)\oplus\mathfrak{sp}(1) = \begin{cases} Sp(n)Sp(1)\subset Spin(4n) & n = even \\ Sp(n)\times Sp(1)\subset Spin(4n) & n = odd \end{cases}$$

となる．

では，$Sp(n)Sp(1)$ から $Spin^c(4n)$ へのリフトは存在するのであろうか？$n = even$ なら $Spin(4n)\to Spin^c(4n)$ を使えばよい．問題は $n = odd$ のときである．

以下 $n = odd$ とする．問題となっているのは

$$\begin{array}{ccc} & & Spin^c(4n) \\ & F\nearrow & \downarrow \mathrm{Ad} \\ Sp(n)Sp(1) & \xrightarrow{i} & SO(4n) \end{array}$$

という可換図式をみたす F が存在するかである．実は上のような F は存在しないのである．F が存在したとすると，$F_* : \pi_1(Sp(n)Sp(1)) = \mathbb{Z}_2 \to \pi_1(Spin^c(4n)) = \mathbb{Z}$ という群準同形を導くが，どちらもアーベル群であり，一般に $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = 0$ である（ちょっと考えればすぐわかる）．よって $F_* = 0$ である．一方 n が奇数なら $i_* = \mathrm{id}$ であった．そこで $\mathrm{Ad}_* F_* = i_* = 0$ となるので矛盾する．

Remark 3.40. $\mathfrak{sp}(1)$ の基底は

$$\sqrt{-1}(\sum a_\alpha^\dagger a_\alpha - n), \quad 2(\sigma^* - \sigma), \quad 2\sqrt{-1}(\sigma^* + \sigma)$$

であった，$U(n)$ のときのように shift させて $\sqrt{-1}\sum a_\alpha^\dagger a_\alpha$ を基底の一つとしてみる．このとき，$E \otimes H$ への作用はうまくいのであるが，$\mathfrak{sp}(1)$ のリー環の関係式が壊れてしまう．このように $U(n) \subset Spin^c(2n)$ の時の方法は使えない．

以上から

Proposition 3.27. 下の可換図式をみたす，**リフト** F **は** n **が偶数なら存在して，** n **が奇数なら存在しない**.

$$\begin{array}{ccc} & & Spin^c(4n) \\ & F\nearrow & \downarrow \mathrm{Ad} \\ Sp(n)Sp(1) & \xrightarrow{i} & SO(4n) \end{array}$$

Remark 3.41. このようなリフトが存在しないからといって，四元数ケーラー多様体上にスピンｃ構造が存在しないというわけではない．上の命題は，自然なスピンｃ構造が存在しないと言ってるだけである．実際，$Sp(1)Sp(1)$ をホロノミーにもつ多様体，つまり 4 **次元の向きつきリーマン多様体上には必ずスピンｃ構造が存在**する．

3.5.5 $Sp(n)Sp(1)$ の表現論

$Sp(n)$ の表現及び表現空間上の幾何構造についてはすでに述べた．そこで $Sp(1) = SU(2)$ の表現について述べる．H を $Sp(1)$ の自然表現空間とする．$k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して k 次対称テンソル積 $V_k := S^k(H)$ を考えると，これは $k+1$ 次元既約表現空間であり **spin-$k/2$ 表現**と呼ばれ，highest weight が k となる．このように $Sp(1)$ の既約表現は非負整数で分類される．また H 上の四元数構造をテンソル積することにより $S^{even}(H)$ には実構造が入り，$S^{odd}(H)$ には四元数構造が入り．

そこで $Sp(n) \times Sp(1)$ **の既約表現は** $Sp(n)$ **の既約表現** (π_ρ, V_ρ) **と** $Sp(1)$ **の既約表現** (π_k, V_k) **の（外）テンソル積表現である**．この既約表現空間 $V_\rho \otimes V_k$ に入る幾何構造を考えよう．V_ρ には $\sum \rho^i = odd$ の時には四元数構造が入り，$\sum \rho^i = even$ の時には実構造が入った（$\rho = (\rho^1, \cdots, \rho^n)$）．そこで

Proposition 3.28. $Sp(n) \times Sp(1)$ の既約表現空間 $V_\rho \otimes V_k$ を考える．このとき

1. $k + \sum \rho^i = even$ のとき，実構造および複素内積が入る．

2. $k + \sum \rho^i = odd$ のとき，四元数構造および複素シンプレクティック構造が入る．

次に，いつ $Sp(n)Sp(1)$ の表現へ落ちるかについて見ていこう．$Sp(n)$ は中心として ± 1 をもつ，そこで表現空間に作用させた場合には $\pi(-1)\pi(-1) = \mathrm{id}$ となるので，$\pi(-1) = \pm\mathrm{id}$ となる．まず E 上では $\pi(-1) = -\mathrm{id}$ で作用する．勝手な既約表現は E のテンソル積の既約成分としてかけるのであった．偶数回テンソル積した場合には id で奇数回テンソル積した場合には –id で作用する．既約成分に制限しても同様であるので，$\sum \rho^i = even$ なら id で，$\sum \rho^i = odd$ なら –id で作用する．よって

Lemma 3.29. $Sp(n)$ の既約表現空間 V_ρ を考える．このとき

1. $\sum \rho^i = even$ のとき，つまり実構造が入るなら $\pi_\rho(-1) = \mathrm{id}$ となる．
2. $\sum \rho^i = odd$ のとき，つまり四元数構造が入るなら $\pi_\rho(-1) = -\mathrm{id}$ となる．

この補題から次がわかる．

Proposition 3.30. $Sp(n) \times Sp(1)$ の既約表現空間 $V_\rho \otimes V_k$ を考える．このとき

1. $k + \sum \rho^i = even$ **のとき，**$Sp(n)Sp(1)$ **の表現空間となる**.
2. $k + \sum \rho^i = odd$ **のとき，**$Sp(n)Sp(1)$ **の表現空間とはならない**.

3.5.6 $Sp(n)Sp(1)$ のスピノール表現

$Spin(4n)$ のスピノール表現を $Sp(n)Sp(1)$ または $Sp(n) \times Sp(1)$ へ制限して既約分解してみよう．スピノール空間 W の $Sp(n)$ に関する分解はすでに述べた．そのとき $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ の基底として $\sigma, \sigma^*, N - n$ を使って分解したが，**クリフォード代数内に** $\mathfrak{sp}(1, \mathbb{C})$ **を実現したときの基底そのものに対応している**．よって，命題 3.18 から

Proposition 3.31. **スピノール空間** W **は** $Sp(n)\times Sp(1)$ **(**$n = odd$**) または** $Sp(n)Sp(1)$ **(**$n = even$**) に関して，次のように既約分解される**:

$$W = \oplus_{p=0}^{n} V_{(1_p, 0_{n-p})} \otimes V_{n-p} = \oplus_{p=0}^{n} \Lambda_0^p(E) \otimes S^{n-p}(H)$$

この分解は粒子の数を保つ分解ではないことに注意する．

3.5.7 Kraines 形式の計算

この subsection は計算がとても面倒だが，だれでもできる計算であるので，結果だけ見て先に進んだほうがよいと思う．

四元数ケーラー多様体はホロノミー群が $Sp(n)Sp(1)$ にはいるものである．このとこから，Kraines 形式という平行な実 4-from が存在する．これは，ケーラーの

場合のケーラー形式のようなものである．この微分形式がどのようにスピノール束に作用するかを見たい．

そこで $Sp(n)Sp(1)$ の表現からどのように Kraines 形式を構成できるかを見ていこう．$Sp(n)$ の自然表現を E, $Sp(1)$ の自然表現空間を H とする．E, H のシンプレクティックユニタリ基底として $\{\epsilon_\alpha\}_\alpha$, $\{h_A\}_A$ をとる．このとき $\{\epsilon_\alpha \otimes h_A\}_{\alpha,A}$ が $E \otimes H$ のユニタリ基底になるのであった．

さて我々が考える考えるべきはテンソル積空間 $E \otimes H$ の交代テンソル積であるので，いろいろと注意が必要である．ちょっと一般の場合に考えてみよう．

Lemma 3.32. $V \otimes W$ に対して $\Lambda^2(V \otimes W) = (\Lambda^2(V) \otimes S^2(W)) \oplus (S^2(V) \otimes \Lambda^2(W))$

Proof. 実際に分解すればよい．

$$
\begin{aligned}
&(v_1 \otimes w_1) \wedge (v_2 \otimes w_2) = \frac{1}{2}\{(v_1 \otimes w_1) \otimes (v_2 \otimes w_2) - (v_2 \otimes w_2) \otimes (v_1 \otimes w_1)\} \\
=&\frac{1}{2}(v_1 \otimes v_2) \otimes (w_1 \otimes w_2) - \frac{1}{2}(v_2 \otimes v_1) \otimes (w_2 \otimes w_1) \\
=&1/4((v_1 \otimes v_2) + (v_2 \otimes v_1)) \otimes ((w_1 \otimes w_2) - (w_2 \otimes w_1)) \\
&+ 1/4((v_1 \otimes v_2) - (v_2 \otimes v_1)) \otimes ((w_1 \otimes w_2) + (w_2 \otimes w_1)) \\
=&(v_1 \odot v_2) \otimes (w_1 \wedge w_2) + (v_1 \wedge v_2) \otimes (w_1 \odot w_2)
\end{aligned}
$$

となる． ■

より高い次数の交代テンソル積はかなり複雑になる．[1]

さて，$\Lambda^2(E \otimes H)$ を考えて，既約分解すると，

$$
\begin{aligned}
&\Lambda^2(E \otimes H) = \Lambda^2(E) \otimes S^2(H) \oplus S^2(E) \otimes \Lambda^2(H) \\
=&(\Lambda_0^2(E) \otimes S^2(H)) \oplus (\mathbb{C}(\sigma_E) \otimes S^2(H)) \oplus S^2(E) \otimes \mathbb{C}(\sigma_H)
\end{aligned}
$$

このように $\Lambda^2(E \otimes H)$ には $S^2(H) = \mathfrak{sp}(1, \mathbb{C})$ が含まれる．それを具体的に書いてみよう．$S^2(H) = \mathfrak{sp}(1, \mathbb{C})$ の基底を $\{y_{++}, y_{+-}, y_{-+}\}$ とする．これらは対称テンソル積で表示すれば

$$
y_{++} = -h_+ \odot h_- = y_{--}, \quad y_{+-} = h_+ \odot h_+, \quad y_{-+} = -h_- \odot h_-
$$

である．また $\mathfrak{sp}(1, \mathbb{C})$ の対称テンソル積（多項式環）の中で $Sp(1)$ の随伴表現により不変なものを不変多項式またはカシミール元と呼ぶ．今の場合には

$$
\begin{aligned}
C_2 &= \sum y_{AB} \otimes y_{BA} = y_{++} \otimes y_{++} + y_{+-} \otimes y_{-+} + y_{--} \otimes y_{--} + y_{-+} \otimes y_{+-} \\
&= 2(y_{++} \odot y_{++} + y_{+-} \odot y_{-+})
\end{aligned}
$$

とすればよい（随伴不変であることは練習問題）．これを $S^p(H)$ へ作用させた場合（$\sum_{AB} \pi_p(y_A B)\pi_p(y_{BA})$）には不変元であるのでシューアの補題から定数で作用

する．実際に highest weight vector に当ててみると定数が $2p(p+2)$ となることがわかる．

まず次の三つの $\Lambda^2(E\otimes H)$ の元を考える．

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sum \mathrm{sign}(\alpha)(\epsilon_\alpha\otimes h_+)\wedge(\epsilon_{-\alpha}\otimes h_+)\\
=&\frac{1}{2}\sum \mathrm{sign}(\alpha)\{(\epsilon_\alpha\odot\epsilon_{-\alpha})\otimes(h_+\wedge h_+)+(\epsilon_\alpha\wedge\epsilon_{-\alpha})\otimes(h_+\odot h_+)\}\\
=&\frac{1}{2}\sum (\mathrm{sign}(\alpha)\epsilon_\alpha\wedge\epsilon_{-\alpha})\otimes(h_+\odot h_+)\\
=&\sigma_E\otimes y_{+-}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\sum \mathrm{sign}(\alpha)(\epsilon_\alpha\otimes h_-)\wedge(\epsilon_{-\alpha}\otimes h_-)\\
=&-\frac{1}{2}\sum (\mathrm{sign}(\alpha)\epsilon_\alpha\wedge\epsilon_{-\alpha})\otimes(h_-\odot h_-)\\
=&\sigma_E\otimes y_{-+}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\sum \mathrm{sign}(\alpha)(\epsilon_\alpha\otimes h_+)\wedge(\epsilon_{-\alpha}\otimes h_-)\\
=&-\frac{1}{2}\sum \mathrm{sign}(\alpha)(\epsilon_\alpha\odot\epsilon_{-\alpha})\otimes(h_+\wedge h_-)+(\mathrm{sign}(\alpha)\epsilon_\alpha\wedge\epsilon_{-\alpha})\otimes(h_+\odot h_-)\\
=&-\frac{1}{2}\sum \mathrm{sign}(-\alpha)(\epsilon_{-\alpha}\odot\epsilon_\alpha)\otimes(h_+\wedge h_-)+(\mathrm{sign}(\alpha)\epsilon_\alpha\wedge\epsilon_{-\alpha})\otimes(h_+\odot h_-)\\
=&-\frac{1}{2}\sum \mathrm{sign}(\alpha)(\epsilon_\alpha\wedge\epsilon_{-\alpha})\otimes(h_+\odot h_-)\\
=&\sigma_E\otimes y_{++}=-\sigma_E\otimes y_{--}
\end{aligned}
$$

ここで $\sigma_E=1/2\sum\mathrm{sign}(\alpha)\epsilon_\alpha\wedge\epsilon_{-\alpha}$ は E の複素シンプレクティック形式で $Sp(n)$ 不変元である．よって，$\mathfrak{sp}(1,\mathbb{C})=\mathbb{C}(\sigma_E)\otimes S^2(H)\subset\Lambda^2(E\otimes H)$ となる．

さらに，これら 2-form を使って $Sp(n)Sp(1)$ 不変な 4-from を作ろう．先ほどの $\mathfrak{sp}(1,\mathbb{C})$ のカシミール元を参考にして，

$$(\sigma_E\otimes y_{+-})\wedge(\sigma_E\otimes y_{-+})+(\sigma_E\otimes y_{-+})\wedge(\sigma_E\otimes y_{+-})+2(\sigma_E\otimes y_{++})\wedge(\sigma_E\otimes y_{++})$$

とすれば，これは $Sp(n)$ および $Sp(1)$ の作用に関して不変元である．

Remark 3.42. 上の式での $\wedge$ はそれぞれを 2-form だとみなして 4-form を作っている．

そこで，4-from

$$\Omega:=2(\sigma_E\otimes y_{+-})\wedge(\sigma_E\otimes y_{-+})+2(\sigma_E\otimes y_{++})\wedge(\sigma_E\otimes y_{++})$$

を **Kraines 形式**とよぶ．これは実形式であり $Sp(n)Sp(1)$ の作用で不変である．

Proof. $J(\epsilon_\alpha)=\mathrm{sign}(\alpha)\epsilon_{-\alpha}$, $J(h_A)=\mathrm{sign}(A)h_{-A}$ であったので，

$$J(\sigma_E)=1/2\sum\mathrm{sign}(\alpha)J(\epsilon_\alpha)\wedge J(\epsilon_{-\alpha})=-1/2\sum\mathrm{sign}(\alpha)\epsilon_{-\alpha}\wedge\epsilon_\alpha=\sigma_E$$

となり，σ_E は実形式である．さらに

$$J(y_{AB}) = J(-\mathrm{sign}(B)h_A \odot h_{-B}) = \mathrm{sign}(A)h_{-A} \odot h_B = -y_{BA}$$

が成立する．これらを使えば実形式であることがわかる．不変性は明らか． ■

さて，この Kraines 形式をスピノール空間の部分空間 $\Lambda_0^p(E) \otimes S^{n-p}(H)$ に作用させてみよう．問題は，Kraines 形式は微分形式であるので，微分形式としてスピノールに作用させなくてはならないことである．

記号を簡単にするため $v_{\alpha,A} = \epsilon_\alpha \otimes h_A$ とする，このとき

$$v_{\alpha,A}v_{\beta,B} + v_{\beta,B}v_{\alpha,A} = -2g(v_{\alpha,A}, v_{\beta,B}) = -2\mathrm{sign}(\alpha A)\delta_{\alpha-\beta}\delta_{A-B}$$

が成立した．そこでまず 2-form をスピノールに作用させた場合を考えると

$$(\sigma_E \otimes y_{+-})\cdot = (\frac{1}{2}\sum \mathrm{sign}(\alpha)v_{\alpha,+} \wedge v_{-\alpha,+})\cdot = \frac{1}{2}\sum \mathrm{sign}(\alpha)v_{\alpha,+} \cdot v_{-\alpha,+}\cdot = -2\sigma\cdot$$

$$(\sigma_E \otimes y_{-+})\cdot = (-\frac{1}{2}\sum \mathrm{sign}(\alpha)v_{\alpha,-} \wedge v_{-\alpha,-})\cdot = -\frac{1}{2}\sum \mathrm{sign}(\alpha)v_{\alpha,-} \cdot v_{-\alpha,-}\cdot = -2\sigma^*\cdot$$

$$\begin{aligned}(\sigma_E \otimes y_{++})\cdot =&(-\frac{1}{2}\sum \mathrm{sign}(\alpha)v_{\alpha,+} \wedge v_{-\alpha,-})\cdot \\ =&-\frac{1}{2}\sum \mathrm{sign}(\alpha)v_{\alpha,+} \cdot v_{-\alpha,-} \cdot -\frac{1}{2}\sum \mathrm{sign}(\alpha)i(v_{\alpha,+})v_{-\alpha,-} \\ =&-\frac{1}{2}\sum \mathrm{sign}(\alpha)v_{\alpha,+} \cdot v_{-\alpha,-} \cdot -\frac{1}{2}\sum \mathrm{sign}(\alpha)\mathrm{sign}(\alpha) \\ =&-\frac{1}{2}\sum \mathrm{sign}(\alpha)v_{\alpha,+} \cdot v_{-\alpha,-} \cdot -n = N-n = [\sigma, \sigma^*]\cdot\end{aligned}$$

がわかる，これで 2-from の作用がわかる．

次に 4-form の作用を考える必要がある．まず

$$\begin{aligned}&(v_{\beta,-} \wedge v_{-\beta,-} \wedge v_{\alpha,+} \wedge v_{-\alpha,+})\cdot \\ =&v_{\beta,-} \cdot (v_{-\beta,-} \wedge v_{\alpha,+} \wedge v_{-\alpha,+}) \cdot +(i(v_{\beta,-})(v_{-\beta,-} \wedge v_{\alpha,+} \wedge v_{-\alpha,+}))\cdot \\ =&v_{\beta,-} \cdot v_{-\beta,-} \cdot (v_{\alpha,+} \wedge v_{-\alpha,+}) \cdot +v_{\beta,-} \cdot (i(v_{-\beta,-})(v_{\alpha,+} \wedge v_{-\alpha,+}))\cdot \\ &+ \mathrm{sign}(\beta)\delta_{\beta-\alpha}(v_{-\beta,-} \wedge v_{-\alpha,+}) \cdot -\mathrm{sign}(\beta)\delta_{\beta\alpha}(v_{-\beta,-} \wedge v_{\alpha,+})\cdot \\ =&v_{\beta,-} \cdot v_{-\beta,-} \cdot (v_{\alpha,+} \wedge v_{-\alpha,+}) \cdot +v_{\beta,-} \cdot (\mathrm{sign}(\beta)\delta_{\beta\alpha}v_{-\alpha,+} - \mathrm{sign}(\beta)\delta_{\beta-\alpha}v_{\alpha,+})\cdot \\ &+ \mathrm{sign}(\beta)\delta_{\beta-\alpha}(v_{-\beta,-} \wedge v_{-\alpha,+}) \cdot -\mathrm{sign}(\beta)\delta_{\beta\alpha}(v_{-\beta,-} \wedge v_{\alpha,+})\cdot\end{aligned}$$

を得る．よって

$$
\begin{aligned}
&\{(\sigma_E \otimes y_{+-}) \wedge (\sigma_E \otimes y_{-+})\}\cdot \\
=&-1/4\sum \mathrm{sign}(\alpha\beta)(v_{\beta,-} \wedge v_{-\beta,-} \wedge v_{\alpha,+} \wedge v_{-\alpha,+})\cdot \\
=&-1/4\sum \mathrm{sign}(\alpha\beta)\{v_{\beta,-}\cdot v_{-\beta,-}\cdot (v_{\alpha,+} \wedge v_{-\alpha,+})\cdot + v_{\beta,-}\cdot(\mathrm{sign}(\beta)\delta_{\beta\alpha}v_{-\alpha,+} - \mathrm{sign}(\beta)\delta_{\beta-\alpha}v_{\alpha,+})\cdot \\
&+\mathrm{sign}(\beta)\delta_{\beta-\alpha}(v_{-\beta,-}\wedge v_{-\alpha,+})\cdot - \mathrm{sign}(\beta)\delta_{\beta\alpha}(v_{-\beta,-}\wedge v_{\alpha,+})\cdot\} \\
=&4\sigma^*\sigma + 1/4\sum v_{\beta,-}\cdot(-\mathrm{sign}(\beta)v_{-\beta,+} - \mathrm{sign}(\beta)v_{-\beta,+})\cdot \\
&+1/4\sum -\mathrm{sign}(\alpha)(v_{\alpha,-}\wedge v_{-\alpha,+})\cdot + 1/4\sum \mathrm{sign}(\alpha)(v_{-\alpha,-}\wedge v_{\alpha,+})\cdot \\
=&4\sigma^*\sigma - 1/2\sum \mathrm{sign}(\beta)v_{\beta,-}\cdot v_{-\beta,+}\cdot - 1/2\sum \mathrm{sign}(\beta)(v_{\beta,-}\wedge v_{-\beta,+})\cdot \\
=&4\sigma^*\sigma + 1/2\sum \mathrm{sign}(\beta)v_{-\beta,-}\cdot v_{\beta,+}\cdot - 1/2\sum \mathrm{sign}(\beta)(v_{\beta,+}\wedge v_{-\beta,-})\cdot \\
=&4\sigma^*\sigma - 1/2\sum \mathrm{sign}(\beta)v_{\beta,+}\cdot v_{-\beta,-}\cdot - 2n - 1/2\sum \mathrm{sign}(\beta)(v_{\beta,+}\wedge v_{-\beta,-})\cdot \\
=&4\sigma^*\sigma + (N-2n) + (N-n) = 4\sigma^*\sigma + 2N - 3n \\
=&4\sigma\sigma^* - 4[\sigma,\sigma^*] + 2N - 3n = 4\sigma\sigma^* - 4N + 4n + 2N - 3n = 4\sigma\sigma^* - 2N + n
\end{aligned}
$$

次に

$$
\begin{aligned}
&(v_{\beta,+}\wedge v_{-\beta,-}\wedge v_{\alpha,+}\wedge v_{-\alpha,-})\cdot \\
=&v_{\beta,+}\cdot(v_{-\beta,-}\wedge v_{\alpha,+}\wedge v_{-\alpha,-})\cdot + (i(v_{\beta,+})(v_{-\beta,-}\wedge v_{\alpha,+}\wedge v_{-\alpha,-}))\cdot \\
=&v_{\beta,+}\cdot v_{-\beta,-}\cdot(v_{\alpha,+}\wedge v_{-\alpha,-})\cdot + v_{\beta,+}\cdot(i(v_{-\beta,-})(v_{\alpha,+}\wedge v_{-\alpha,-}))\cdot \\
&+\mathrm{sign}(\beta)(v_{\alpha,+}\wedge v_{-\alpha,-})\cdot + \mathrm{sign}(\beta)\delta_{\beta\alpha}(v_{-\beta,-}\wedge v_{\alpha,+})\cdot \\
=&v_{\beta,+}\cdot v_{-\beta,-}\cdot(v_{\alpha,+}\wedge v_{-\alpha,-})\cdot + \mathrm{sign}(\beta)\delta_{\beta\alpha}v_{\beta,+}\cdot v_{-\alpha,-}\cdot \\
&+\mathrm{sign}(\beta)(v_{\alpha,+}\wedge v_{-\alpha,-})\cdot + \mathrm{sign}(\beta)\delta_{\beta\alpha}(v_{-\beta,-}\wedge v_{\alpha,+})\cdot
\end{aligned}
$$

から

$$
\begin{aligned}
&\{(\sigma_E \otimes y_{++}) \wedge (\sigma_E \otimes y_{++})\}\cdot \\
=&\frac{1}{4}\sum \mathrm{sign}(\alpha\beta)(v_{\beta,+}\wedge v_{-\beta,-}\wedge v_{\alpha,+}\wedge v_{-\alpha,-})\cdot \\
=&\frac{1}{4}\sum \mathrm{sign}(\alpha\beta)\{v_{\beta,+}\cdot v_{-\beta,-}\cdot(v_{\alpha,+}\wedge v_{-\alpha,-})\cdot + \mathrm{sign}(\beta)\delta_{\beta\alpha}v_{\beta,+}\cdot v_{-\alpha,-}\cdot \\
&+\mathrm{sign}(\beta)(v_{\alpha,+}\wedge v_{-\alpha,-})\cdot + \mathrm{sign}(\beta)\delta_{\beta\alpha}(v_{-\beta,-}\wedge v_{\alpha,+})\cdot\} \\
=&N(N-n) + \frac{1}{4}\sum \mathrm{sign}(\alpha)\delta_{\beta\alpha}v_{\beta,+}\cdot v_{-\alpha,-}\cdot + \frac{1}{4}\sum_{\alpha\beta}\mathrm{sign}(\alpha)((v_{\alpha,+}\wedge v_{-\alpha,-})\cdot + \delta_{\beta\alpha}(v_{-\beta,-}\wedge v_{\alpha,+}))\cdot \\
=&N(N-n) + \frac{1}{4}\sum \mathrm{sign}(\beta)v_{\beta,+}\cdot v_{-\beta,-}\cdot \\
&+n\frac{1}{2}\sum_{\alpha}\mathrm{sign}(\alpha)(v_{\alpha,+}\wedge v_{-\alpha,-}) - \frac{1}{4}\sum_{\alpha\beta}\mathrm{sign}(\alpha)(v_{\alpha,+}\wedge v_{-\alpha,-})\cdot \\
=&N(N-n) - \frac{1}{2}N - n(N-n) + \frac{1}{2}(N-n) = (N-n)^2 - n/2
\end{aligned}
$$

以上から Kraines 形式のスピノール空間への作用は

$$\Omega\cdot = 2(N-n)^2 - n + 2(4\sigma\sigma^* - 2N + n) = 2(N-n)(N-n-2) - 3n + 8\sigma\sigma^*$$

となる．スピノール空間の既約成分 $\Lambda_0^{n-p}(E)\otimes S^p(H)$ を考える．$\Lambda_0^{n-p}(E)$ の元は粒子の数が $n-p$ 個で σ^* で消えるものの集まりであり，$\mathfrak{sp}(1,\mathbb{C})$ に対しては，lowest weight vector の集まりの空間である．この空間に σ を何度も作用させることで $\Lambda_0^{n-p}(E)\otimes S^p(H)$ を得る．

$$\Lambda_0^{n-p}(E) \xrightarrow{\sigma} \sigma\Lambda_0^{n-p}(E) \xrightarrow{\sigma} \cdots \xrightarrow{\sigma} \sigma^p\Lambda_0^{n-p}(E) \xrightarrow{\sigma} 0$$

この空間に Kraines 形式は定数で作用することを見てみる．$\phi \in \Lambda_0^{n-p}(E)$ とすれば $\Omega\cdot\phi = (2p(p+2)-3n)\phi$ となる．より粒子の数が多い元 $\sigma\phi$ に作用させてみよう．σ によって粒子の数が二つ増えるので，$\sigma\phi$ は粒子の数が $n-p+2$ である．

$$\begin{aligned}
&\Omega(\sigma\phi) = 2(-p+2)(-p)\sigma\phi - 3n + 8\sigma\sigma^*\sigma\phi\\
=&2p(p-2)\sigma\phi - 3n + 8\sigma[\sigma^*,\sigma]\phi\\
=&2p(p-4)\sigma\phi - 3n + 8\sigma(n-N)\phi\\
=&2p(p-2)\sigma\phi - 3n + 8p\sigma\phi = (2p(p+2)-3n)\sigma\phi
\end{aligned}$$

となるので変わらない．このように $\Lambda_0^{n-p}(E)\otimes S^p(H)$ 上で Ω は $2p(p+2)-3n$ で作用する．**カシミール元の作用なら $2p(p+2)$ であるが，微分形式として作用させてるのでこのようなずれが起こる**.

Remark 3.43. 論文によっては，-2Ω を Kraines 形式とよぶ.

3.5.8 微分形式について

$Sp(n)Sp(1)$ の自然表現 $E\otimes H$ の交代テンソル積表現を既約分解するのは困難である．次数が低い場合は直接既約分解すればなんとかなるが，一般の場合は困難. ここでは既約分解の仕方のみ書いておく.

$\Lambda^*(E\otimes H)$ がどのように分解できるかは，$\Lambda^* = \mathbb{C}l_{4n} = W_{4n}\otimes W_{4n}^*$ を使えば，

$$\Big(\bigoplus_p \Lambda_0^p(E)\otimes S^{n-p}(H)\Big)\otimes\Big(\bigoplus_q \Lambda_0^q(E)\otimes S^{n-q}(H)\Big)$$

を分解すればよい．$S^{n-p}(H)\otimes S^{n-q}(H)$ はクレブッシュゴルダンの定理からわかる．また $\Lambda_0^p(E)\otimes\Lambda_0^q(E)$ の既約分解も知られている．

$$\Lambda_0^p(E)\otimes\Lambda_0^q(E) = \bigoplus_{a,b}\Lambda_0^{a,b}(E)$$

ここで和は

$$\begin{cases} a+b \equiv p+q \mod 2, \\ a+b \le p+q, \\ |p-q| \le a-b \le 2n-p-q \end{cases}$$

を満たす非負整数の組 (a,b) について和をとっている．ここで $\Lambda_0^{a,b}(E)$ は $\Lambda_0^a(E) \otimes \Lambda_0^b(E)$ の highest weight が $(1_a)+(1_b)$ となる既約成分のことである．（この分解については，適当な表現論の本を参照．または，Tsukamoto, C,「Spectra of Laplace-Beltrami operators on $SO(n+2)/SO(2) \times SO(n)$ and $Sp(n+1)/Sp(1) \times Sp(n)$」Osaka J. Math 18 (1981) 407-426 を見よ）．

とりあえず，これで $\Lambda^*(E \otimes H)$ の既約分解はできるのであるが，次数 d を固定したとき，どれが $\Lambda^d(E \otimes H)$ の既約成分であるかがわからない．

別の方法を考える．一般に $GL(V) \times GL(W)$ の自然表現 $V \otimes W$ を考える．このとき**シューア functor** というものを使えば，$\Lambda^d(V \otimes W)$ を $GL(V) \times GL(W)$ に関して既約分解できる（see [1] Page 80）

Proposition 3.33.

$$\Lambda^d(V \otimes W) = \bigoplus_{\lambda} \mathbb{S}_\lambda(V) \otimes \mathbb{S}_{\lambda'}(W)$$

ここで λ は d の分割であり，ヤング図形を使って書いたとき，行の長さが $\dim V = n$ 以下で，列の長さが $\dim W = m$ 以下のもので和をとっている．また λ' は λ を転置したヤング図形である．ここで分割を $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ とすれば，$\mathbb{S}_\lambda(V)$ **は *highest weight* λ をもつ $GL(n,\mathbb{C})$ の既約表現空間 V_λ のこと**.

例えば，$d=2$ なら $\lambda=(2)$, $\lambda=(1,1)$ のみであり，

$$\Lambda^2(V \otimes W) = S^2(V) \otimes \Lambda^2(W) \oplus \Lambda^2(V) \otimes S^2(W)$$

が成立する（この分解は前 section で見た）．

さて，$W=H$, $V=E$ の場合には，$\dim H = 2$ を使えば，

$$\Lambda^d(E \otimes H) = \bigoplus_{0 \le a \le [d/2]} \mathbb{S}_{(2_a, 1_{d-2a})}(E) \otimes \mathbb{S}_{(d-a,a)}(H)$$

となる．また，$\mathbb{S}_{(d-a,a)}(H) = (\Lambda^2 H)^a \otimes S^{d-2a}(H)$ であるので，$U(2n) \times Sp(1)$ の表現と見れば，

$$\Lambda^d(E \otimes H) = \bigoplus_{0 \le a \le [d/2]} \mathbb{S}_{(2_a, 1_{d-2a})}(E) \otimes S^{d-2a}(H)$$

が成立する．そこで $U(2n)$ の既約表現 $\mathbb{S}_{(2_a, 1_{d-2a})}(E)$ を $Sp(n)$ へ制限したときにどのように既約分解されるかがわかればよい（いわゆる**分規則** or **制限則**）．これがかなり複雑である．しかし，Littelwood-Ricardson 法則を使って次数が計算する方

法は知られている．[1] の page 427 に公式および方法が載っているのだが，実際に計算するのは困難.

そこで，[1] page 427 の分規則を説明するために準備をする.

Definition 3.5. $U(n)$ の highest weight λ の既約表現の指標 $\chi_\lambda(g) = \mathrm{tr}(\pi_\lambda(g))$ を考える．極大トーラスを T としてその座標を $t = (t_1, \cdots, t_n)$ とする（対応する行列は $t_1, \cdots, t_n$ が diagonal にならんだもの）．$\chi_\lambda(g'gg'^{-1}) = \chi_\lambda(g)$ により，指標は極大トーラス上での値がわかればよい．そこで,

$$S_\lambda(t_1, \cdots, t_n) := \chi_\lambda(t_1, \cdots, t_n)$$

を**シューア関数**とよぶ.

実際にシューア関数を計算することができ,

$$S_\lambda(t) = \frac{1}{\prod_{1 \le i < j \le n}(t_i - t_j)} \det \begin{pmatrix} t_1^{\lambda_1+n-1} & t_1^{\lambda_2+n-2} & \cdots & t_1^{\lambda_n} \\ t_2^{\lambda_1+n-1} & t_2^{\lambda_2+n-2} & \cdots & t_2^{\lambda_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_n^{\lambda_1+n-1} & t_n^{\lambda_2+n-2} & \cdots & t_n^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

となる．このように指標は極大トーラス上の関数になるが，上の表示から Laurent 多項式になっている.

$$S_\lambda(t_1, \cdots, t_n) = \sum_{\nu=(\nu_1, \cdots, \nu_n)} a_\nu t^\nu$$

の形になっているが，ν が weight であり，a_ν が weight の重複度になる．weight の重複度は組み合わせ論的に計算することが可能（see [1]）.

さて，既約表現 V_λ と $V_{\lambda'}$ のテンソル積分解は指標の積を展開したものに対応する．つまり,

$$S_\lambda S_{\lambda'} = \sum_\nu N_{\lambda\lambda'\nu} S_\nu$$

となるなら，既約分解は

$$V_\lambda \otimes V_{\lambda'} = \bigoplus_\nu N_{\lambda\lambda'\nu} V_\nu$$

となるのである.（シューア多項式は対称多項式であり，さらに対称多項式の基底になるので，上のようなことが可能なのである）．この既約成分の重複度 $N_{\lambda\lambda'\nu}$ を **Littlewood-Richardson 係数**とよび，組み合わせ論で計算可能である（ヤング図形を使用する [1]）.

以下が $U(2n)$ の表現を $Sp(n)$ の表現としたときの，分規則である.

Proposition 3.34. E を $U(2n)$ の自然表現空間とする．$U(2n)$ の既約表現 $\mathbb{S}_\lambda(E)$（*highest weight* が λ の既約表現）を $Sp(n)$ へ制限したとき，

$$\mathbb{S}_\lambda(E) = \bigoplus_{\bar{\lambda}} N_{\lambda\bar{\lambda}} V_{\bar{\lambda}}$$

となる．ここで $V_{\bar{\lambda}}$ は *highest weight* $\bar{\lambda}$ をもつ $Sp(n)$ の既約表現であり，$N_{\lambda\bar{\lambda}}$ は

$$N_{\lambda\bar{\lambda}} = \sum_{\eta} N_{\eta\bar{\lambda}\lambda}$$

で与えられる．η は $\eta = (\eta_1 = \eta_2 \geq \eta_3 = \eta_4 \geq \cdots)$ なるもので和をとっている．

Example 3.25. $d = 2$ の場合．

$$\mathbb{S}_{(1_2)}(E) = \Lambda^2(E) = \mathbb{C}(\sigma_E) \oplus \Lambda_0^2(E), \quad \mathbb{S}_2(E) = S^2(E) = \Lambda_0^{1,1}(E)$$

となるので，

$$\Lambda^2(E \otimes H) = S^2(H) \oplus (\Lambda_0^2(E) \otimes S^2(H)) \oplus S^2(E)$$

$d = 3$ の場合，

$$\Lambda^3(E \otimes H) = \mathbb{S}_{(1_3)}(E) \otimes S^3(H) \oplus \mathbb{S}_{(2,1)}(E) \otimes H$$

となる．ここで分規則を使えば，

$$\mathbb{S}_{(2,1)}(E) = \Lambda_0^{2,1}(E) \oplus E$$

を得る．よって．

$$\Lambda^3(E \otimes H) = (\Lambda_0^3(E) \oplus E) \otimes S^3(H) \oplus (\Lambda_0^{2,1}(E) \oplus E) \otimes H$$

$d = 4$ の場合．まず，

$$\Lambda^3(E \otimes H) = (\mathbb{S}_{(1_4)}(E) \otimes S^4(H)) \oplus (\mathbb{S}_{(2,1,1)}(E) \otimes S^2(H)) \oplus (\mathbb{S}_{(2,2)}(E))$$

となる．

$$\mathbb{S}_{1,1,1,1}(E) = \Lambda^4(E) = \mathbb{C}(\sigma_E^2) \oplus \sigma_E \Lambda_0^2(E) \oplus \Lambda_0^4(E)$$

また，分規則を使えば，

$$\mathbb{S}_{2,1,1}(E) = \Lambda_0^{3,1}(E) \oplus \Lambda_0^{1,1}(E) \oplus \Lambda_0^2(E), \quad \mathbb{S}_{2,2}(E) = \Lambda_0^{2,2}(E) \oplus \Lambda_0^2(E) \oplus \mathbb{C}$$

となるので，$\Lambda^4(E \otimes H)$ の既約分解を得ることができる．**特に** $\Lambda^4(E \otimes H)$ **には一次元自明表現が存在する**が，これが Kraines 形式のいる空間である．.

同様に $\Lambda^{4k}(E \otimes H)$（$k = 0, \cdots, n$）には，一次元自明表現が存在する，その基底は Kranies 形式を使って Ω^k とあらわすことができる．

参考文献

[1] W. Fulton and J. Harris *Representation theory, a first course*, GTM 129 Springer.

[2] Th. Friedrich *Dirac operators in Riemannian Geometry,* Graduate Studies in Mathematics 25, AMS

[3] R. Goodman and N. Wallach, *Representations and invariants of the classical groups.* Encyclopedia of Math. and its Appl. **68**, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[4] W. Kramer, U. Semmelmann and G. Weingart, *The first eigenvalue of the Dirac operator on quaternionic Kähler manifolds,* Comm. Math. Phys. **199** (1998), 327-349.

[5] H. B. Lawson and M. L. Michelsohn, *Spin Geometry,* Princeton Univ. Press, Princeton, 1989.

[6] A. Moroianu, U. Semmelmann, *Parallel Spinors and holonomy groups*, J. Math. Phys. 41, 2395-2402 (2000).

[7] S. Salamon, *Quaternionic Kähler manifolds,* Invent. Math. **67** 143-171 (1982).

[8] 小林俊行・大島利雄, Lie 群と Lie 環１，２岩波講座　現代数学の基礎１２，１３, 1999 年.

索 引