ケーラー多様体上のユニタリ群不変一階微分作用素

本間 泰史（早稲田大学 理工学部）*

1 Introduction（直交群不変一階微分作用素）

幾何学や物理学において計量から定まる微分作用素の解, スペクトル, 指数などの情報から多様体の幾何構造, 位相構造を考察するのが一つの手段である. そのような作用素のうち一階のものとしては外微分, 余微分, 共形キリング作用素, ディラック作用素, ツイスター作用素などが挙げられる（注：外微分は計量を必要としない. ディラック作用素とツイスター作用素はスピン構造も必要）. 実際, これら一階微分作用素は次のように計量から定義される.

M を（向き付けられた）n 次元リーマン多様体とし, $\mathbf{SO}(M)$ を主直交フレーム束とする. この主束の構造群 $SO(n)$ の有限次元既約ユニタリ表現を (π_ρ, V_ρ) とし, 同伴ベクトル束 $\mathbf{S}_\rho := \mathbf{SO}(M) \times_\rho V_\rho$ を考える. ここで ρ は表現の最高重みを表す. この同伴束上において, レビチビタ接続による共変微分 ∇ を既約分解することにより一階微分作用素

$$D^\rho_\lambda : \Gamma(\mathbf{S}_\rho) \xrightarrow{\nabla} \Gamma(\mathbf{S}_\rho \otimes T^*(M)) \xrightarrow{\Pi_\lambda} \Gamma(\mathbf{S}_\lambda). \tag{1.1}$$

を得る. ここで Π_λ は, $\mathbf{S}_\rho \otimes T^*(M)$ から, ある既約成分 $\mathbf{S}_\lambda$ への直交射影である. この微分作用素 D^ρ_λ を, **（特殊）直交群不変一階微分作用素**または **gradient** と呼ぶ（論文によっては高スピンディラック作用素とも呼ぶ. また直交群不変とは等長変換により微分作用素が不変であること）.

例 1.1 *(スピノール).* スピン多様体上で $\mathbf{SO}(M)$ の代わりに $\mathbf{Spin}(M)$ を考え, スピノール表現 (π_Δ, V_Δ) を考える. このとき $\mathbf{S}_\Delta \otimes T^*(M) = \mathbf{S}_\Delta \oplus \mathbf{S}_T$ と既約分解することができる. 微分作用素 $D^\Delta_\Delta = \Pi_\Delta \circ \nabla$ がディラック作用素 D であり, $D^\Delta_T = \Pi_T \circ \nabla$ がツイスター作用素 T である. つまり, スピノール束上で $\nabla \sim D + T$ となる. ちなみに, D の解（$\in \ker D$）を調和スピノール, T の解をツイスタースピノール, ∇ の解を平行スピノールという.

例 1.2 *(微分形式).* 交代テンソル積表現 $(\pi_{\Lambda^p}, V_{\Lambda^p})$ を考える. 対応する同伴ベクトル束は $\Lambda^p(M) \otimes \mathbb{C}$ である. $\Lambda^p(M) \otimes T^*(M) = \Lambda^{p+1}(M) \oplus \Lambda^{p-1}(M) \oplus \mathbf{S}_C$ と既約分解され, $\nabla \sim d + d^* + C$ となる. ここで C は共形キリング作用素である. 一次微分形式をベクトル場と同一視すれば C の解は共形ベクトル場である.

例 1.3. 4次元ツイスター理論での massless field equation $\nabla^{AA'}\phi_{AB\cdots D} = 0$ における微分作用素 $\nabla^{AA'}$.

*e-mail: homma@gm.math.waseda.ac.jp

例 1.4. リーマン曲率テンソルを既約分解した共形ワイルテンソル W は, ある既約同伴ベクトル束の切断である. よって W に作用する計量から定まる一階微分作用素を考えることができる（[CGH]）.

例 1.5. Rarita-Schwinger 作用素. これはディラック型でない一階楕円型微分作用素である. また, 偶数次元でカイラリティーがある.

このように直交群不変一階微分作用素は幾何学の様々な場面で登場する. 我々はこれら微分作用素をより一般的, 統一的に考察したい. そこで, 初めの一歩として**微分作用素の主表象つまり局所的な性質を調べる**ことになる. 例えば, ディラック作用素ならクリフォード代数であり, 外微分なら外積代数である.「局所的な性質」と言っても, 幾何学への応用は豊富である. 微分作用素に対するボホナー-ワイゼンベック公式, 消滅定理, 固有値評価などは, すべて局所的な性質から導かれる. またコンパクト多様体上の楕円型微分作用素の指数も, 主表象のホモトピー類で決定されるのであった. さらにクリフォード代数がそうであったように, 主表象は表現論と深い関係を持つ. 次の章では, 主表象の代数的構造から, どのようにボホナー-ワイゼンベック公式や固有値評価を与えることができるのかを見ていく. そして, それらは**共形重み**という量で支配されることがわかる.

さて, 直交群を他のコンパクト群 G に置き換えてみよう. つまり G 構造を持つ多様体を考える. この場合にも (1.1) のようにして, 一階微分作用素を定義できる. それを G **不変一階微分作用素**と呼ぶ. 今回の講演では, G がユニタリ群 $U(m)$ の場合, つまり多様体が概エルミート多様体の場合について考察する. 特にケーラー多様体上の**ユニタリ群不変一階微分作用素**（**Kählerian gradients**）を考え, 主表象の代数的構造から, すべてのボホナー恒等式を与える. またいくつかの応用も与える.

2　共形重みとボホナー恒等式

この章では, 直交群不変一階微分作用素に付随した共形重み（局所的に決まるある定数）のリーマン幾何学での重要性について述べよう.

直交群不変一階微分作用素 D^ρ_λ は共形共変性をもつ. 実際, リーマン計量 g を $g' = e^{2\sigma(x)}g$ と共形変形したとき, D^ρ_λ は次のように変化する：

$$D'^\rho_\lambda = e^{-(m(\rho;\lambda)+1)\sigma} \circ D^\rho_\lambda \circ e^{m(\rho;\lambda)\sigma}$$

ここで $m(\rho;\lambda)$ は**共形重み**という定数であり最高重み ρ, λ から決まる定数. 次の命題は, 作用素の主表象の代数的関係式から得ることができる.

命題 2.1 ([H2]). リーマン多様体 M 上の同伴ベクトル束 $\mathbf{S}_\rho$ を考え, $\mathbf{S}_\rho \otimes T^*(M) = \sum_{i=1}^N \mathbf{S}_{\lambda_i}$ を既約分解とする. このとき直交群不変一階微分作用素 $\{D^\rho_{\lambda_i}\}_{i=1}^N$ に対して次が成立.

$$\sum_i (D^\rho_{\lambda_i})^* D^\rho_{\lambda_i} = \nabla^*\nabla, \quad \sum_i m(\rho;\lambda_i)(D^\rho_{\lambda_i})^* D^\rho_{\lambda_i} = R^1_\rho. \tag{2.1}$$

ここで R^1_ρ はリーマン曲率から定まる $\mathbf{S}_\rho$ のある束準同型である.

例 2.1 *(微分形式).* p 次微分形式の空間 $\Lambda^p(M)$ を考える. この同伴束上の作用素は外微分 d, 余微分 d^*, 共形キリング作用素 C であった. これらに対して次が成り立つ（係数は正規化してある）：

$$C^*C + \frac{1}{p+1}d^*d + \frac{1}{n-p+1}dd^* = \nabla^*\nabla, \quad -\mathbf{1}C^*C + \frac{\mathbf{p}}{p+1}d^*d + \frac{\mathbf{n-p}}{n-p+1}dd^* = R^1_{\Lambda^p}.$$

ここで太い数字が共形重みである. この式から $\Lambda^p(M)$ 上のボホナー-ワイゼンベック公式

$$dd^* + d^*d = \nabla^*\nabla + R^1_{\Lambda^p}$$

を得る. 次にラプラス作用素 $dd^* + d^*d$ の（下からの）固有値評価を与えよう. M をコンパクトとし, $0 \leq p \leq [n/2]$ とする. ϕ を p 次微分形式とすれば,

$$\begin{aligned}
\|d\phi\|^2 + \|d^*\phi\|^2 &= \frac{n-p+1}{n-p}\left(\frac{n-p}{n-p+1}\|d\phi\|^2 + \frac{n-p}{n-p+1}\|d^*\phi\|^2\right) \\
&\geq \frac{n-p+1}{n-p}\left(\frac{p}{p+1}\|d\phi\|^2 + \frac{n-p}{n-p+1}\|d^*\phi\|^2\right) \\
&= \frac{n-p+1}{n-p}((R_{\Lambda^p}(\phi),\phi) + \|C\phi\|^2) \geq \frac{n-p+1}{n-p}(R_{\Lambda^p}(\phi),\phi)
\end{aligned}$$

となる. よって, 次の有名な結果を得る.

命題 2.2 *(Gallot-Meyer).* コンパクトリーマン多様体 M のリーマン曲率 R が $R > r$ と正定数 r で抑えられているとする. このとき $\Lambda^p(M)$ 上のラプラス作用素 $dd^* + d^*d$ の固有値 λ は $\lambda \geq p(n-p+1)r$ を満たす.

$\Lambda^0(M)$ 上のラプラス作用素の場合を考える. 固有値 $\lambda \neq 0$ の固有関数 f_λ に対して, df_λ を恒等式に代入すれば, 次を得る.

命題 2.3 *(Lichnerowicz-Obata).* M の *Ricci* 曲率が $\mathrm{Ric} \geq (n-1)r$ を満たすとき, 関数上ラプラス作用素の零でない固有値 λ は $\lambda \geq nr$ を満たす.

例 2.2 *(スピノール).* スピン多様体 M 上のディラック作用素 D 及びツイスター作用素 T に対して次が成立：

$$\frac{n-1}{n}T^*T + \frac{1}{n}D^*D = \nabla^*\nabla, \quad -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\frac{n-1}{n}T^*T + \frac{\mathbf{n-1}}{\mathbf{2}}\frac{1}{n}D^*D = \frac{1}{8}\kappa.$$

これより Lichnerowicz の公式

$$D^2 = \nabla^*\nabla + \frac{1}{4}\kappa$$

を得る. さらに, 次も明らか.

命題 2.4 *(Friedrich).* コンパクトスピン多様体上でディラック作用素の固有値 λ の二乗は次のように評価できる（κ はスカラー曲率）.

$$\lambda^2 \geq \frac{n}{4(n-1)} \min_{x \in M} \kappa(x). \tag{2.2}$$

以上の例から, ボホナー-ワイゼンベック公式や固有値評価での共形重みの重要性が理解できたであろう.

Remark 2.1. 微分幾何学では, 固有値評価で等号が成立する多様体の分類が重要となる. ラプラス作用素の場合は球面である. ディラック作用素の場合は, 実キリングスピノールを持つスピン多様体である. そのような多様体の分類は C. Bär や T. Friedrich らにより完成している.

Remark 2.2. 命題 2.1において, 作用素の適当な線形結合が曲率変換となる式 (2.1) を与えた. 一般に $\mathbf{S}_\rho$ 上に直交群不変一階微分作用素が N 個あれば, 同様の恒等式で一次独立なものを $[N/2]$ 個得ることができる（by T. Branson [Br2]）. つまり

$$\sum_{i=1}^{N} a_i (D^\rho_{\lambda_i})^* D^\rho_{\lambda_i} = \exists \text{curvature transf.}$$

となるような $a = (a_1, \cdots, a_N)$ として独立なものが $[N/2]$ 個存在する. ここで a はある連立方程式の解であることが [Br2] において示されている. しかし, 微分幾何へ応用するには, 解 a 及びそのときの曲率変換を具体的にもとめる必要がある（[CGH] においても, この問いの答えを与えようとしているが, 結局は解いていない）. これを全く別のアプローチを用いてユニタリ群の場合に完全に解いたというのが, 今回の結果である. また, そのアプローチは直交群の場合にも適用可能であり, 上の問いに完全な答えを与えることができる（直交群の場合には, かなり複雑になるが）.

3 ユニタリ群不変一階微分作用素（Kählerian gradient）

以下, ユニタリ群不変一階微分作用素（ここでは Kählerian gradient と呼ぶ）について議論していく. 考え方や手法は一般のコンパクト群 G に対して同様である.

M を実 $2m$ 次元概エルミート多様体, $\mathbf{U}(M)$ をユニタリフレーム束とし, $\mathbf{U}(M)$ 上に接続を一つ固定する. 構造群 $U(m)$ の最高重み ρ を持つ有限次元既約ユニタリ表現を (π_ρ, V_ρ) を考え, 対応する同伴束を $\mathbf{S}_\rho = \mathbf{U}(M) \times_\rho V_\rho$ とする. $\mathbf{U}(M)$ 上接続から導かれる $\mathbf{S}_\rho$ 上の共変微分 ∇ は, 概複素構造により $\nabla = \nabla^{1,0} + \nabla^{0,1}$ と分解される. これをさらに分解することにより一階微分作用素を得る.

定義 3.1 (Kählerian gradient). 次の一階微分作用素を M 上の **Kählerian gradient** と呼ぶ：

$$D^\rho_{\lambda'} : \Gamma(\mathbf{S}_\rho) \xrightarrow{\nabla^{1,0}} \Gamma(\mathbf{S}_\rho \otimes \Lambda^{1,0}(M)) = \Gamma(\mathbf{S}_\rho \otimes T^{0,1}(M)) \xrightarrow{\Pi_{\lambda'}} \Gamma(\mathbf{S}_{\lambda'}), \tag{3.1}$$

$$D^\rho_{\lambda''} : \Gamma(\mathbf{S}_\rho) \xrightarrow{\nabla^{0,1}} \Gamma(\mathbf{S}_\rho \otimes \Lambda^{0,1}(M)) = \Gamma(\mathbf{S}_\rho \otimes T^{1,0}(M)) \xrightarrow{\Pi_{\lambda''}} \Gamma(\mathbf{S}_{\lambda''}). \tag{3.2}$$

ここでエルミート計量により $\Lambda^{1,0}(M) \simeq T^{0,1}(M)$, $\Lambda^{0,1}(M) \simeq T^{1,0}(M)$ としている.

3.1 既約分解

最高重み ρ に依存して, どのような Kählerian gradient が現れるかを見てみよう. つまり $\mathbf{S}_\rho \otimes T^{1,0}(M)$ 及び $\mathbf{S}_\rho \otimes T^{0,1}(M)$ の既約分解である.

まず, ユニタリ群の有限次元既約ユニタリ表現は**優整重み**（最高重みに対応) により分類される. 優整重みとは $\rho=(\rho^1,\cdots\rho^m)\in\mathbb{Z}^m$ で $\rho^1\geq\cdots\geq\rho^{m-1}\geq\rho^m$ を満たすものである. 以下 $\mathbb{Z}^m$ **の基底を** $\mu_i=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)$**（**$i$ **番目が** 1**）としておく**.

例 3.1. $\mathbb{C}^m$ 上自然表現の最高重みは $\mu_1=(1,0,\cdots,0)$ である. これは $T^{1,0}(M)=\Lambda^{0,1}(M)$ に対応する. この p 次交代テンソル積表現の最高重みは $\sum_{i=1}^p\mu_i=(1,\cdots,1,0,\cdots,0)$ であり, 対応する同伴束は $(0,p)$ 次微分形式の束 $\Lambda^{0,p}(M)$.

例 3.2. $\overline{\mathbb{C}^m}$ 上表現の最高重みは $-\mu_m=(0,\cdots,0,-1)$ である. 対応する同伴束は $T^{0,1}(M)=\Lambda^{1,0}(M)$. この q 次交代テンソル積表現の最高重みは $\sum_{i=m-q+1}^m-\mu_i=(0,\cdots,0,-1,\cdots,-1)$ であり, 対応する同伴束は $\Lambda^{q,0}(M)$.

例 3.3. ユニタリ群 $U(m)$ は自然に $Spin^c(2m)$ の部分群とみなせる. このとき $\sum_{p=0}^m\Lambda^{0,p}$ が $Spin^c(2m)$ のスピノール表現.

例 3.4. 既約表現 (π_ρ,V_ρ) の共役表現 $(\pi_{{}^t\rho},V_{{}^t\rho})$ の最高重みは ${}^t\rho=(-\rho^m,\cdots,-\rho^1)$.

さて, 各ファイバーで考えれば, $\mathbf{S}_\rho\otimes T^{1,0}(M)$ は $V_\rho\otimes\mathbb{C}^m$ に, $\mathbf{S}_\rho\otimes T^{0,1}(M)$ は $V_\rho\otimes\overline{\mathbb{C}^m}$ に対応する. 指標公式などから, これらテンソル積表現の既約分解は次で与えられる.

1. $V_\rho\otimes\mathbb{C}^m$ の既約成分の最高重みは $\rho+\mu_i$ で優整重みとなるもの. これは ρ に対応するヤング図形を考え, それに箱を一個たしたとき, 再びヤング図形になるもの.

2. $V_\rho\otimes\overline{\mathbb{C}^m}$ の既約成分の最高重みは $\rho-\mu_i$ で優整重みとなるもの. ヤング図形で箱を一個取り去る操作.

そこで $\rho\pm\mu_i$ **が優整重みでないときにも, 仮想的に** $V_{\rho\pm\mu_i}:=\{0\}$ **とすれば, 次のように既約分解できる**：

$$V_\rho\otimes\mathbb{C}^m=\sum_{1\leq i\leq m}V_{\rho+\mu_i},\quad V_\rho\otimes\overline{\mathbb{C}^m}=\sum_{1\leq i\leq m}V_{\rho-\mu_i}. \tag{3.3}$$

この記号と同様にして, **高々**$2m$ **個の Kählerian gradients** を得る.

$$D_{-i}:\Gamma(\mathbf{S}_\rho)\xrightarrow{\nabla^{1,0}}\Gamma(\mathbf{S}_\rho\otimes\Lambda^{1,0}(M))=\Gamma(\mathbf{S}_\rho\otimes T^{0,1}(M))\xrightarrow{\Pi_{-i}}\Gamma(\mathbf{S}_{\rho-\mu_i}), \tag{3.4}$$

$$D_{+i}:\Gamma(\mathbf{S}_\rho)\xrightarrow{\nabla^{0,1}}\Gamma(\mathbf{S}_\rho\otimes\Lambda^{0,1}(M))=\Gamma(\mathbf{S}_\rho\otimes T^{1,0}(M))\xrightarrow{\Pi_{+i}}\Gamma(\mathbf{S}_{\rho+\mu_i}). \tag{3.5}$$

Remark 3.1. 上でみた既約分解から, $\nabla^{1,0}$ からの微分作用素 D_{-i} が N 個あれば, D_{+i} も N 個現れる. よって微分作用素は必ず偶数個ある.

3.2 作用素の共形共変性と共形重み

直交群不変一階微分作用素の場合には接続としてレビチビタ接続を考えた. 同様にユニタリフレーム束 $\mathbf{U}(M)$ の接続も幾何学的なもの（計量から定まるもの）を考えるべきであろう. そのような接続として次の二つが挙げられる.

1. エルミート多様体上の**エルミート接続**. g, J を保ち, 捩れ率の $(1,1)$ 部分が消える接続.

2. 概エルミート多様体上の**レビチビタ接続の** $\mathfrak{u}(m) \subset \mathfrak{so}(2m)$ **部分接続**. g, J を保ち, 捩れ率が $(1,1)$ テンソルとなる接続.

ここで, これらの接続が一致することが**ケーラー多様体**になるための必要十分条件であることに注意. 上のような幾何学的接続を選んだ場合, Kählerian gradients は共形共変性を持つ.

定理 3.1 (共形共変性 [H4]). 概エルミート多様体 M 上のエルミート計量 g を $g' = e^{2\sigma} g$ $(\sigma \in C^\infty(M))$ と共形変形する. このとき $\mathbf{S}_\rho$ 上の *Kählerian gradients* $\{D_{\pm i}\}_i$ は次の共形共変性をもつ：

1. エルミート多様体上のエルミート接続の場合：

$$D'_{\pm i} = e^{(\pm\pi_\rho(c_1)+1)\sigma} D_{\pm i} e^{\mp\pi_\rho(c_1)\sigma} : \Gamma(\mathbf{S}_\rho) \to \Gamma(\mathbf{S}_{\rho\pm\mu_i}). \tag{3.6}$$

ここで c_1 は一次カシミール元（後述）.

2. 概エルミート多様体上のレビチビタ接続の $\mathfrak{u}(m)$ 部分接続の場合：

$$D'_{\pm i} = e^{-(\pm w_{\pm i}+1)\sigma} D_{\pm i} e^{w_{\pm i}\sigma} : \Gamma(\mathbf{S}_\rho) \to \Gamma(\mathbf{S}_{\rho\pm\mu_i}). \tag{3.7}$$

ここで $w_{\pm i}$ は最高重み ρ と添え字 i に依存した定数であり, 次で与えられる.

$$w_{+i} := -\rho^i + i - 1, \quad w_{-i} := \rho^i + m - i. \tag{3.8}$$

この w_{+i} を $(1,0)$ **共形重み**, w_{-i} を $(0,1)$ **共形重み**と呼ぶ.

また, $\dim\ker D_{\pm i} < \infty$ のとき $\dim\ker D_{\pm i}$ は M の共形不変量であることに注意.

この定理において, 直交群の場合と同様に共形重みを得た. この**共形重みが Kählerian gradients の局所的な性質を支配する**ことになる.

4 クリフォード準同型（微分作用素の表象）の代数的構造

この章では Kählerian gradients の局所性質, つまり主表象について議論していく. ディラック作用素の主表象はクリフォード積であった. その一般化として, Kählerian gradient の主表象を定義する.

定義 4.1 (クリフォード準同型). 既約ユニタリ表現 (π_ρ, V_ρ) を考え, $u \in \mathbb{C}^m$, $\bar{u} \in \overline{\mathbb{C}^m}$ とする. このとき V_ρ から $V_{\rho\pm\mu_i}$ への次の線形写像 $p_{+i}(u)$, $p_{-i}(\bar{u})$ をクリフォード準同型と呼ぶ：

$$p_{+i}(u) : V_\rho \ni \phi \to p_{+i}(u)\phi := \Pi_{+i}(\phi \otimes u) \in V_{\rho+\mu_i} \subset V_\rho \otimes \mathbb{C}^m, \tag{4.1}$$
$$p_{-i}(\bar{u}) : V_\rho \ni \phi \to p_{-i}(\bar{u})\phi := \Pi_{-i}(\phi \otimes u) \in V_{\rho-\mu_i} \subset V_\rho \otimes \overline{\mathbb{C}^m}. \tag{4.2}$$

ここで $\Pi_{\pm i}$ は既約成分への直交射影である. また内積に関するの随伴写像を

$$p_{+i}(u)^* : V_{\rho+\mu_i} \to V_\rho, \quad p_{-i}(\bar{u})^* : V_{\rho-\mu_i} \to V_\rho \tag{4.3}$$

とする.

クリフォード積の代数構造はクリフォード代数である. 同様にして, クリフォード準同型の代数的関係式をもとめたい. その方法は次のようにすればよい.

方針

1. 共形重みを用いて**クリフォード準同型**とリー環 $\mathfrak{gl}(m,\mathbb{C})$ の**包絡環**を関連付ける.
2. 包絡環のある関係式をもとめる. この際, **高次カシミール作用素**が鍵となる.
3. 1, 2 を合わせてクリフォード準同型の関係式を導く.

そこで, まずリー環 $\mathfrak{u}(m)$ を複素化した $\mathfrak{g} := \mathfrak{gl}(m,\mathbb{C})$ の包絡環を考える. $\mathfrak{g}$ の包絡環とはテンソル代数 $T(\mathfrak{g})$ を $X \otimes Y - Y \otimes X - [X,Y]$（$\forall X, Y \in \mathfrak{g}$）で生成される両側イデアル $N(\mathfrak{g})$ で割った代数 $U(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/N(\mathfrak{g})$ のことである. この包絡環には, テンソル代数の次数からフィルター付けされた代数としての構造が入る（$\mathbb{C} \subset \mathfrak{g} \subset U^2(\mathfrak{g}) \subset U^3(\mathfrak{g}) \cdots$）. そこで $\omega \in U^q(\mathfrak{g})$ かつ $\omega \notin U^{q-1}(\mathfrak{g})$ となる元 ω の**次数**を q と定める.

次に, 必要となるいくつかの記号を準備する.

1. $\mathbb{C}^m$ の標準基底を $\{\epsilon_k\}_{k=1}^m$ とし, $\overline{\mathbb{C}^m}$ の共役基底を $\{\bar{\epsilon}_k\}_{k=1}^m$ とする.
2. $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(m,\mathbb{C})$ の標準基底を $\{e_{kl} = \epsilon_k \otimes \bar{\epsilon}_l\}_{k,l}$ とする. つまり e_{kl} は (k,l) 成分が 1 で, 他の成分が 0 の $m \times m$ 行列.
3. 天下り的ではあるが, **包絡環 $U(\mathfrak{g})$ の q 次の元 e_{kl}^q**（$k, l = 1, \cdots, m,\ q = 0, 1, 2, \cdots$）を次で定義する：
$$e_{kl}^q := \sum_{1 \le i_1, i_2, \cdots, i_{q-1} \le m} e_{ki_1} e_{i_1 i_2} \cdots e_{i_{q-1} l} \in U(\mathfrak{g}). \tag{4.4}$$
ここで $e_{ij}^0 := \delta_{ij}$ とする.
4. $\mathfrak{g}$ 上での環自己同型 $Z \mapsto \tilde{Z} := -{}^tZ$ を包絡環へ拡張した**対合的な環自己同型**を $\widetilde{\ }$ で表す：
$$U(\mathfrak{g}) \ni \omega = Z_1 Z_2 \cdots Z_k \mapsto \widetilde{\omega} = (-1)^{kt} Z_1 {}^t Z_2 \cdots {}^t Z_k \in U(\mathfrak{g}). \tag{4.5}$$
ここで ${}^tZ$ は Z の転置を表す.
5. 上記の**対合変換で e_{kl}^q を移したものを $\tilde{e}_{kl}^q$ と書く**：
$$\tilde{e}_{kl}^q := \widetilde{e_{kl}^q} = (-1)^q \sum_{i_1 i_2 \cdots i_{q-1}} e_{i_1 k} e_{i_2 i_1} \cdots e_{l i_{q-1}}. \tag{4.6}$$

実は, ここで定義した e_{kl}^q, $\tilde{e}_{kl}^q$ がクリフォード準同型と関係するのであるが, その前にカシミール元についてふれる. **カシミール元とは $U(\mathfrak{g})$ の中心 $\mathfrak{z}$ に入る元のこと**である. シューアの補題からカシミール元は既約成分上で定数で作用する. また, $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(m,\mathbb{C})$ の場合には, カシミール元は $\mathfrak{g}$ の随伴作用で不変な元として特徴づけできる. 我々が扱う e_{kl}^q と $\tilde{e}_{kl}^q$ の顕著な性質は, e_{kl} の関係式 $[e_{ij}, e_{kl}] = \delta_{jk} e_{il} - \delta_{il} e_{kj}$ と同様の振る舞いをすることである.

補題 4.1. q 次の元 e^q_{kl}, $\tilde{e}^q_{kl}$ は次を満たす：

$$[e_{ij}, e^q_{kl}] = \delta_{jk} e^q_{il} - \delta_{il} e^q_{kj}, \quad \sum_{1\le i\le m} e^p_{ki} e^q_{il} = e^{p+q}_{kl}, \tag{4.7}$$

$$[e_{ij}, \tilde{e}^q_{kl}] = \delta_{jl} \tilde{e}^q_{ki} - \delta_{ik} \tilde{e}^q_{jl}, \quad \sum_{1\le i\le m} \tilde{e}^p_{ki} \tilde{e}^q_{il} = \tilde{e}^{p+q}_{kl}. \tag{4.8}$$

この補題から e^q_{kl} のトレース $c_q := \sum_k e^q_{kk}$ は $\mathfrak{g}$ の随伴作用と可換であり, q 次カシミール元となる.

命題 4.2 (高次カシミール元その１ [Z]). 次は q 次カシミール元である.

$$c_q := \sum_k e^q_{kk} \in \mathfrak{Z} \cap U^q(\mathfrak{g}). \tag{4.9}$$

ただし, $c_0 := \sum_k \delta_{kk} = m$ とする. このカシミール元は最高重み $\rho = (\rho^1, \cdots, \rho^m)$ の既約表現空間 V_ρ 上で次の定数で作用する：

$$\pi_\rho(c_q) = \sum_{i=1}^m w^q_{-i} \gamma_{-i} \quad on\ V_\rho. \tag{4.10}$$

ここで w_{-i} は $(0,1)$ 共形重みであり,

$$\gamma_{-i} := \prod_{j\ne i} \left(1 - \frac{1}{w_{-i} - w_{-j}} \right). \tag{4.11}$$

特に c_2 が通常のカシミール元である. また $\pi_\rho(c_1) = \sum_i \rho^i$ となる.

命題 4.3 (高次カシミール元その２ [H4]). 上の補題から $\tilde{c}_q := \sum_k \tilde{e}^q_{kk}$ も q 次カシミール元である. $\tilde{c}_q$ は既約表現空間 V_ρ 上に次の定数で作用.

$$\pi_\rho(\tilde{c}_q) = \sum_{i=1}^m w^q_{+i} \gamma_{+i} \quad on\ V_\rho. \tag{4.12}$$

ここで w_{+i} は $(1,0)$ 共形重みである. また γ_{+i} も γ_{-i} と同様にして定義される.

さて, 話をもとに戻そう. まず第一の目的はクリフォード準同型と包絡環の関係である. 次の命題は $V_\rho \otimes \mathbb{C}^m = \sum V_{\rho+\mu_i}$ 上に 2 次カシミール元 $\tilde{c}_2$ を $V_\rho \otimes \overline{\mathbb{C}^m} = \sum V_{\rho-\mu_i}$ には c_2 を作用させることで証明できる.

命題 4.4 (クリフォード準同型と包絡環 [H4]). 任意の $q \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ に対して, 次が成立：

$$\sum_{1\le i\le m} w^q_{+i} p_{+i}(\epsilon_k)^* p_{+i}(\epsilon_l) = \pi_\rho(\tilde{e}^q_{kl}) \in \mathrm{End}(V_\rho), \tag{4.13}$$

$$\sum_{1\le i\le m} w^q_{-i} p_{-i}(\bar{\epsilon}_k)^* p_{-i}(\bar{\epsilon}_l) = \pi_\rho(e^q_{kl}) \in \mathrm{End}(V_\rho). \tag{4.14}$$

この命題からクリフォード準同型 $p_{+i}(\epsilon_k)^* p_{+i}(\epsilon_l)$ は $\{\pi_\rho(\tilde{e}^q_{kl})\}_{q=0}^{m-1}$ の線形結合として表示できることがわかる（ファンデルモンデ行列を考えよ）. よって, 我々の興味は e^q_{kl}, $\tilde{e}^q_{kl}$ の関係式へと移る. 第二の目的である包絡環でのある関係式をもとめよう. $\tilde{e}^q_{lk}$ を $\{e^p_{kl}\}_{p=0}^q$ のカシミール元を係数とする線形結合として表示するのである.

定理 4.5 (包絡環における関係式 [H4]). 任意の $q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して次の関係式が成立する.

$$\sum_{p=0}^{q} \binom{q}{p} (-m)^{q-p} \tilde{e}^{p}_{kl} = (-1)^q \sum_{p=0}^{q} K_{q-p}(-c) e^{p}_{lk} \quad \textit{in } U(\mathfrak{g}). \tag{4.15}$$

この式でトレースをとれば次のカシミール元に対する関係式が成立する.

$$\sum_{p=0}^{q} \binom{q}{p} (-m)^{q-p} \tilde{c}_l = (-1)^q \sum_{p=0}^{q} K_{q-p}(-c) c_p = (-1)^q K_{q+1}(-c). \tag{4.16}$$

ここで $K_q(-c)$ は次で与えられるカシミール元の多項式である：

$$K_q(-c) := \sum_{i_1+2i_2+\cdots+qi_q=q} \frac{(i_1+i_2+\cdots+i_q)!}{i_1! i_2! \cdots i_q!} c_0^{i_1} \cdots c_{q-1}^{i_q} \tag{4.17}$$

Proof. 式 (4.4) において, 一番前にある e_{ki_1} を一番後ろへ, 逆に $e_{i_{q-1}l}$ を一番手前に移す操作を帰納的に行う. また補題 4.1の関係式を用いる. ■

Remark 4.1. 多項式 $K_q(x) = (-1)^q K_q(-x)$ は次の母関数表示を持つ.

$$K(z) := \sum_{q=0}^{\infty} K_q(x) z^q = \frac{1}{1 + x_0 z^1 + x_1 z^2 + \cdots}.$$

Remark 4.2. 上の定理における関係式は, 任意の q に対して成立する. しかし, 我々が考えるべきは既約表現空間における関係式であるので, 実質的には高々$q = m-1$ までの関係式だけで十分である（その理由は, 次の系からもわかる）. また, (4.15), (4.16) で対合変換 $\widetilde{\ }$ をとれることに注意.

命題 4.4及び定理 4.5から, クリフォード準同型の代数的関係式, つまり微分作用素の主表象の関係式を得る.

系 4.6 (クリフォード準同型の関係式 [H4]). 最高重み ρ を持つ既約表現空間 V_ρ 上のクリフォード準同型 $p_{\pm i}$ 及びその随伴 $p^*_{\pm i}$ を考える. 任意の $q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して次が成立：

$$\sum_{1 \leq i \leq m} (w_{+i} - m)^q p_{+i}(\epsilon_k)^* p_{+i}(\epsilon_l) = (-1)^q \sum_{1 \leq i \leq m} (\sum_{p=0}^{q} \pi_\rho(K_{q-p}(-c)) w^p_{-i}) p_{-i}(\bar{\epsilon}_l)^* p_{-i}(\bar{\epsilon}_k) \tag{4.18}$$

この系の意味するところは $p_{+i}(\epsilon_k)^* p_{+i}(\epsilon_l)$ は $\{p_{-j}(\bar{\epsilon}_l)^* p_{-j}(\bar{\epsilon}_k)\}_j$ の線形結合で書けるということである. 特に, 関係式としては高々m 個の関係式でよい.

例 4.1 *(スピノール).* スピノール空間を考え, クリフォード準同型がクリフォード積に一致することをみる. スピノール空間は $\sum_{0 \leq p \leq m} \Lambda^{0,p}$ であった. ここで $V_\rho := \Lambda^{0,p} = \Lambda^p(\mathbb{C}^m)$ で, 最高重みは $\rho := (1, \cdots, 1, 0, \cdots, 0)$（フェルミ粒子が p 個詰まった空間）. さて $\Lambda^{0,p} \otimes \mathbb{C}^m$ 及び $\Lambda^{0,p} \otimes \overline{\mathbb{C}^m}$ の既約分解は

$$V_\rho \otimes \mathbb{C}^m = V_{\rho+\mu_1} \oplus V_{\rho+\mu_{p+1}}, \quad V_\rho \otimes \overline{\mathbb{C}^m} = V_{\rho-\mu_m} \oplus V_{\rho-\mu_p} \tag{4.19}$$

となる. よって次の四つのクリフォード準同型を得る.

$$p_{+1}(\epsilon_k):\Lambda^{0,p}\to V_{\rho+\mu_1},\quad p_{+(p+1)}(\epsilon_k):\Lambda^{0,p}\to V_{\rho+\mu_{p+1}}=\Lambda^{0,p+1}, \tag{4.20}$$

$$p_{-m}(\bar\epsilon_k):\Lambda^{0,p}\to V_{\rho-\mu_m},\quad p_{-p}(\bar\epsilon_k):\Lambda^{0,p}\to V_{\rho-\mu_p}=\Lambda^{0,p-1}. \tag{4.21}$$

これらの関係式は次のようになる（太い数字が共形重みである）:

$$\begin{aligned} p_{+1}(\epsilon_k)^*p_{+1}(\epsilon_l)+p_{p+1}(\epsilon_k)^*p_{p+1}(\epsilon_l)&=\delta_{kl},\\ p_{-m}(\bar\epsilon_k)^*p_{-m}(\bar\epsilon_l)+p_{-p}(\bar\epsilon_k)^*p_{-p}(\bar\epsilon_l)&=\delta_{kl},\\ -\mathbf{1}p_{+1}(\epsilon_k)^*p_{+1}(\epsilon_l)+\mathbf{p}\,p_{+(p+1)}(\epsilon_k)^*p_{+(p+1)}(\epsilon_l)&=-\pi_\rho(e_{lk}),\\ \mathbf{0}+(\mathbf{m}-\mathbf{p}+\mathbf{1})p_{-p}(\bar\epsilon_k)^*p_{-p}(\bar\epsilon_l)&=\pi_\rho(e_{kl}). \end{aligned} \tag{4.22}$$

そこで

$$-\bar\epsilon_k\cdot:=i(\bar\epsilon_k)=\sqrt{m-p+1}\,p_{-p}(\bar\epsilon_k):\Lambda^{0,p}\to\Lambda^{0,p-1}, \tag{4.23}$$

$$\epsilon_k\cdot:=\epsilon_k\wedge=\sqrt{p+1}\,p_{+(p+1)}(\epsilon_k):\Lambda^{0,p}\to\Lambda^{0,p+1} \tag{4.24}$$

とすれば，次のクリフォード代数の関係式などが成立する.

$$\epsilon_k\cdot\bar\epsilon_l\cdot+\bar\epsilon_l\cdot\epsilon_k\cdot=-\delta_{kl},\quad (\bar\epsilon_k\cdot)^*=-\epsilon_k\cdot,\quad (\epsilon_k\cdot)^*=-\bar\epsilon_k\cdot,\quad -\epsilon_k\cdot\bar\epsilon_l\cdot=\pi_\rho(e_{kl}). \tag{4.25}$$

Remark 4.3. クリフォード代数の関係式としては $\epsilon_k\cdot\epsilon_l\cdot+\epsilon_l\cdot\epsilon_k\cdot=0$ 及びその共役も必要である. これらの関係式は $\Lambda^{0,p}\otimes S^2(\mathbb{C}^m)$ の既約分解などを考えれば得ることができる.

5 Kählerian gradients に対するボホナー恒等式

以下, M を**ケーラー多様体**とし, 接続はレビチビタ接続とする（このように仮定しないと, かなり複雑になってしまう）. 既約同伴束 $\mathbf{S}_\rho$ 上の Kählerian gradients $\{D_{\pm i}\}_{i=1}^m$ 及びその形式的随伴作用素 $\{D^*_{\pm i}\}_{i=1}^m$ を考える. これら作用素の主表象はクリフォード準同型 $p_{\pm i}$ 及び $p^*_{\pm i}$ である. 前章でのクリフォード準同型の関係式は**微分作用素のボホナー恒等式に自然に持ち上がる**. しかし, そのまま持ち上がるわけではなく, **曲率変換によるおつり**（0 階の作用素）が現れる. そこで少しの間, 同伴束 $\mathbf{S}_\rho$ 上の曲率変換について議論しよう.

ユニタリフレーム束 $\mathbf{U}(M)$ 上のレビチビタ接続は接束 $T^{1,0}(M)$ 上の接続を導く. この接続の曲率 $R_T(X,Y)$ を縮約することにより, リッチ曲率 Ric やスカラー曲率 κ を得る. ここで, これらは $\Gamma(\mathrm{End}(T^{1,0}(M)))$ の元と見なせることに注意しよう. 同様に, $\mathbf{S}_\rho$ 上の曲率を縮約して曲率変換（曲率に依存した $\mathbf{S}_\rho$ の束準同型）を得ることができる.

同伴束 $\mathbf{S}_\rho$ 上の曲率は

$$R_\rho(X,Y):=\nabla_X\nabla_Y-\nabla_Y\nabla_X-\nabla_{[X,Y]} \tag{5.1}$$

により与えられる. $\mathbf{S}_\rho$ 上の共変微分 ∇ はレビチビタ接続から導かれたものであるので R_ρ はケーラー計量に依存したものであることに注意. この曲率 R_ρ を包絡環束 $\mathbf{U}(\mathfrak{g}):=\mathbf{U}(M)\times_{\mathrm{Ad}}U(\mathfrak{g})$ の作用により縮約する.

定義 5.1 (同伴束上の曲率変換). 局所ユニタリフレームを $\{\epsilon_k\}_{k=1}^m$ とし, $e_{kl} := \epsilon_k \otimes \bar{\epsilon}_l$ を包絡環束の局所切断とする. このとき, 任意の $q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して同伴束 $\mathbf{S}_\rho$ 上の曲率変換 R_ρ^q を次で定義する：

$$R_\rho^q := \sum_{k,l} \pi_\rho(e_{lk}^q) R_\rho(\epsilon_k, \bar{\epsilon}_l) \in \Gamma(\mathrm{End}(\mathbf{S}_\rho)). \tag{5.2}$$

この曲率変換のいくつかの性質を述べておこう.

補題 5.1 (曲率変換の性質 [H4]). *1.* R_ρ^q は $\mathbf{S}_\rho$ 上の内積に関して自己共役である.

2. 正則断面曲率が一定 $= r$ のケーラー多様体上で,

$$R_\rho^q = \frac{r}{2}\pi_\rho(c_q c_1 + c_{q+1})\mathrm{id}. \tag{5.3}$$

3. 0 次の曲率変換 $R_\rho^0 = \sum_k R_\rho(\epsilon_k, \bar{\epsilon}_k)$ はリッチ曲率にのみ依存する. 特に, リッチフラットケーラー多様体上では, $R_\rho^0 = 0$.

クリフォード準同型の関係式（系 4.6）において, クリフォード準同型 $p_{\pm i}^* p_{\pm i}$ を微分作用素 $D_{\pm i}^* D_{\pm i}$ に置き換える. このとき, おつりとして曲率変換 R_ρ^q が現れることに注意すれば, 一般ボホナー恒等式を得る.

定理 5.2 (一般ボホナー恒等式 [H4]). ケーラー多様体 M 上の *Kählerian gradient* $D_{\pm i} : \Gamma(\mathbf{S}_\rho) \to \Gamma(\mathbf{S}_{\rho \pm \mu_i})$ を考える. このとき次が成立する：

1. 0 次及び 1 次の関係式

$$\sum_{1 \leq i \leq m} D_{-i}^* D_{-i} = \nabla^{1,0*}\nabla^{1,0}, \qquad \sum_{1 \leq i \leq m} D_{+i}^* D_{+i} = \nabla^{0,1*}\nabla^{0,1}, \tag{5.4}$$

$$\sum_{1 \leq i \leq m} D_{-i}^* D_{-i} - D_{+i}^* D_{+i} = R_\rho^0, \qquad \sum_{1 \leq i \leq m} D_{-i}^* D_{-i} + D_{+i}^* D_{+i} = \nabla^*\nabla, \tag{5.5}$$

$$\sum_{1 \leq i \leq m} w_{-i} D_{-i}^* D_{-i} + w_{+i} D_{+i}^* D_{+i} = R_\rho^1. \tag{5.6}$$

2. 高次の関係式

$$\begin{aligned} &\sum_{0 \leq p \leq q} \binom{q}{p} (-m)^{q-p} R_\rho^p \\ =&(-1)^{q+1} \sum_{1 \leq i \leq m} \{ \sum_{0 \leq p \leq q} \pi_\rho(K_{q-p}(-\tilde{c})) w_{+i}^p) D_{+i}^* D_{+i} + (w_{-i} - m)^q D_{-i}^* D_{-i} \}. \end{aligned} \tag{5.7}$$

この一般ボホナー恒等式から微分作用素を適当に消去していけば, ボホナーワイゼンベック公式, 消滅定理, 固有値評価などを得る. それら応用を与える前に twisted Kählerian gradients を考える.

ディラック作用素 D に対して, ベクトル束 E（及び接続）をテンソルした twisted Dirac $D_E : \Gamma(\mathbf{S} \otimes E) \to \Gamma(\mathbf{S} \otimes E)$ を考えることがよくある. 同様に twisted Kählerian gradients を考えることができる. その場合にも一般ボホナー恒等式を得る.

系 5.3 (twisted Kählerian gradients [H4]). E を M 上の正則エルミートベクトル束とし, ∇^E を E 上の標準接続とする. このとき $\mathbf{S}_\rho \otimes E$ 上の *twisted Kählerian gradients* $D^E_{\pm i}$ に対して次が成立：

$$\sum_{1\le i\le m}(D^E_{-i})^* D^E_{-i} = \nabla^{1,0*}\nabla^{1,0}, \quad \sum_{1\le i\le m}(D^E_{+i})^* D^E_{+i} = \nabla^{0,1*}\nabla^{0,1}, \tag{5.8}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{0\le p\le q}\binom{q}{p}(-m)^{q-p}(R^p_\rho \otimes \mathrm{id} + \mathfrak{R}^p_E)\\ =&(-1)^{q+1}\sum_{1\le i\le m}\{\sum_{0\le p\le q}\pi_\rho(K_{q-p}(-\tilde{c}))w^p_{+i})(D^E_{+i})^* D^E_{+i} + (w_{-i}-m)^q(D^E_{-i})^* D^E_{-i}\}.\end{aligned} \tag{5.9}$$

ここで ∇ は $\mathbf{S}_\rho \otimes E$ 上のテンソル積接続. また ∇^E の曲率を $R_E(\cdot,\cdot)$ とすれば

$$\mathfrak{R}^q_E := \sum \pi_\rho(e^q_{lk}) \otimes R_E(\epsilon_k, \bar{\epsilon}_l). \tag{5.10}$$

6　ケーラー幾何, スピンケーラー幾何への応用

この章では一般ボホナー恒等式のいくつかの応用を与える. ケーラー幾何やスピンケーラー幾何での様々な結果を**一般ボホナー恒等式から容易に導くことができる**. またそれらの一般化も可能である.

6.1　正則切断と消滅定理

同伴ベクトル束 $\mathbf{S}_\rho$ 上には V_ρ 上の計量から導かれるエルミート計量が入っている. さて一方, 一般線形群 $GL(m,\mathbb{C})$ の複素表現と $U(m)$ のユニタリ表現は一対一に対応するので $\mathbf{S}_\rho = \mathbf{GL}_{\mathbb{C}}(M) \times V_\rho$ とすれば, 正則構造を入れることができる. ここで $\mathbf{GL}_{\mathbb{C}}(M)$ は M 上の正則フレーム束. このように $\mathbf{S}_\rho$ **は正則エルミートベクトル束**となる. ただし, 正則構造を考える場合はユニタリフレーム $\{\epsilon_k\}_k$ の代わりに正則フレーム $\{dz_k\}_k$ を考える. 一般ボホナー恒等式から $\mathbf{S}_\rho$ の正則切断に関して次の結果を得る.

命題 6.1 (正則断面に関する応用 [H4]). M をコンパクトケーラー多様体とし, 同伴ベクトル束 $\mathbf{S}_\rho$ 上に正則構造を入れておく. このとき次が成立.

1. $\mathbf{S}_\rho$ の正則切断 ϕ は次を満たす：

$$R^q_\rho(\phi) = \sum_i w^q_{-i} D^*_{-i} D_{-i}\phi \quad \textit{for any } q. \tag{6.1}$$

よって正則切断への $D^*_{-i}D_{-i}$ の作用は曲率の作用でかける. また, 正則切断の空間は *Kählerian gradients* の *kernel* の交わりとなる.

$$H^0(M, \mathbf{S}_\rho) = \{\mathbf{S}_\rho \text{ の正則切断 }\} = \bigcap_{1\le i\le m} \ker D_{+i}. \tag{6.2}$$

2. リッチフラットケーラー多様体上で次が成立：

$$\{\mathbf{S}_\rho \text{ の正則切断 }\} = \{\mathbf{S}_\rho \text{ の反正則切断 }\} = \{\mathbf{S}_\rho \text{ の平行切断 }\}. \tag{6.3}$$

3. 次の消滅定理が成立：$\mathrm{Ric} \lesseqgtr 0$ かつ $\pi_\rho(c_1) = \sum \rho^i \gtreqless 0$ なら $H^0(M, \mathbf{S}_\rho) = \{0\}$.

例 6.1 *(正則ベクトル場).* *Ric* < 0 なら $H^0(M, T^{1,0}(M)) = \{0\}$.

例 6.2 *(正則微分形式).* *Ric* > 0 なら $H^0(M, \Omega^q) = \{0\}$ for $q \geq 1$.

例 6.3 *($\mathbb{C}P^m$ 上正則切断).* 複素 m 次元射影空間 $\mathbb{C}P^m$ 上の同伴ベクトル束 $\mathbf{S}_\rho$ を考える. このとき $\mathbf{S}_\rho$ 上の曲率変換 R^q_ρ は定数であるので, 正則切断 ϕ に対して

$$\frac{r}{2}\pi_\rho(c_q c_1 + c_{q+1})\phi = \sum_i w^q_{-i} D^*_{-i} D_{-i}\phi \quad \text{for any } q$$

を得る. この連立方程式を解けば, 正則切断は $D^*_{-i}D_{-i}$ の固有切断であることがわかり, 固有値は次で与えられる：

$$D^*_{-i}D_{-i}\phi = \frac{1}{2}\gamma_{-i}(w_{-i} + \pi_\rho(c_1))\phi = \frac{1}{2}\gamma_{-i}(w_{-i} + \sum \rho^i)\phi. \tag{6.4}$$

6.2 ケーラー多様体上ドルボー-ディラック作用素

ケーラー多様体 M 上には, $U(m) \subset Spin^c(2m)$ により自然にスピン c 構造が入る. そして, スピノール束 $\sum \Lambda^{0,p}(M)$ 及びドルボー-ディラック作用素 $\sqrt{2}(\bar\partial + \bar\partial^*)$ を得る. 例 4.1と同様に $\Lambda^{0,p}(M)$ 上に四つの微分作用素 D_{-m}, D_{-p}, D_{+1}, $D_{+(p+1)}$ を得る. 特に

$$\sqrt{m-p+1}D_{-p} = -\sum \bar\epsilon_k \cdot \nabla_{\epsilon_k} = -\bar\partial^*, \quad \sqrt{p+1}D_{+(p+1)} = \sum \epsilon_k \nabla_{\bar\epsilon_k} = \bar\partial. \tag{6.5}$$

また, $\Lambda^{0,p}(M)$ 上の曲率変換に対し $R^0_{\Lambda^{0,p}} = R^1_{\Lambda^{0,p}}$ が成立するので, 一般ボホナー恒等式は次のよう：

$$\begin{aligned} D^*_{-m}D_{-m} + D^*_{-p}D_{-p} + D^*_{+1}D_{+1} + D^*_{+(p+1)}D_{+(p+1)} &= \nabla^*\nabla, \\ D^*_{-m}D_{-m} + D^*_{-p}D_{-p} - D^*_{+1}D_{+1} - D^*_{+(p+1)}D_{+(p+1)} &= R^0_{\Lambda^{0,p}}, \\ (m-p+1)D^*_{-p}D_{-p} - D^*_{+1}D_{+1} + pD^*_{+(p+1)}D_{+(p+1)} &= R^1_{\Lambda^{0,p}} = R^0_{\Lambda^{0,p}}. \end{aligned} \tag{6.6}$$

これらの恒等式から D_{+1} 及び D_{-m} を消去すればボホナーワイゼンベック公式を得る.

$$2(m-p+1)D^*_{-p}D_{-p} + 2(p+1)D^*_{+(p+1)}D_{+(p+1)} = 2(\bar\partial\bar\partial^* + \bar\partial^*\bar\partial) = \nabla^*\nabla + R^0_{\Lambda^{0,p}}. \tag{6.7}$$

さらに, 一般ボホナー恒等式から次のケーラー幾何で良く知られた結果を得る.

命題 6.2. M をコンパクトケーラー多様体とする.

1. *Ric* > 0 なら $\dim \mathbf{H}^{0,p} = 0$（$p \geq 1$）. ここで $\mathbf{H}^{0,p}$ は調和 $(0,p)$ 次微分形式の空間.

2. 調和 $(0,p)$ 次微分形式 ϕ は $\partial\phi = 0$ 及び $\nabla^*\nabla\phi = R_{\Lambda^{0,p}}\phi$ を満たす.

3. 正則 $(0,p)$ 次微分形式 ϕ は $\partial^*\partial\phi = \bar\partial\bar\partial^*\phi = -R^0_{\Lambda^{0,p}}\phi$ を満たす. ここで正則とは $\nabla^{0,1}\phi = 0$ となるもの（$\bar\partial\phi = 0$ のことではない）.

4. *Ric* $\geq c > 0$ とする. このとき $\Lambda^{0,p}(M)$ 上のラプラス作用素 $2(\bar\partial\bar\partial^* + \bar\partial^*\bar\partial)$ の固有値は $\lambda \geq 2pc$ を満たす. また等号成立する固有 $(0,p)$ 次微分形式は正則である.

6.3 スピンケーラー多様体上ディラック作用素

ケーラー多様体がスピン構造をもつ場合, つまり M がスピンケーラー多様体の場合を考える. M のスピン構造は, 標準直線束 $K := \Lambda^{0,m}(M)$ の正則ルート $E = K^{1/2}$ に対応する. このときスピノール束は $\sum \Lambda^{0,p}(M) \otimes E$ であり, ディラック作用素はドルボー-ディラック作用素をねじった $\sqrt{2}(\bar{\partial}_E + \bar{\partial}_E^*)$ である. 曲率変換を計算すれば, $\mathfrak{R}_E^0 = -\kappa/4$, $\mathfrak{R}_E^1 = -R_{\Lambda^{0,p}}/2$ がわかり, スピノール束上の一般ボホナー恒等式を得る：

$$(D_{-m}^E)^* D_{-m}^E + (D_{-p}^E)^* D_{-p}^E + (D_{+1}^E)^* D_{+1}^E + (D_{+(p+1)}^E)^* D_{+(p+1)}^E = \nabla^* \nabla, \tag{6.8}$$

$$(D_{-m}^E)^* D_{-m}^E + (D_{-p}^E)^* D_{-p}^E - (D_{+1}^E)^* D_{+1}^E - (D_{+(p+1)}^E)^* D_{+(p+1)}^E = R_{\Lambda^{0,p}}^0 - \frac{1}{4}\kappa, \tag{6.9}$$

$$(m-p+1)(D_{-p}^E)^* D_{-p}^E - (D_{+1}^E)^* D_{+1}^E + p(D_{+(p+1)}^E)^* D_{+(p+1)}^E = \frac{1}{2} R_{\Lambda^{0,p}}^0. \tag{6.10}$$

これより Lichnerowicz の公式がいえる（先ほどと異なり $R_{\Lambda^{0,p}}^0$ は消えることに注意）.

$$\begin{aligned} &2(m-p+1)(D_{-p}^E)^* D_{-p}^E + 2(p+1)(D_{+(p+1)}^E)^* D_{+(p+1)}^E \\ =&2(\bar{\partial}_E \bar{\partial}_E^* + \bar{\partial}_E^* \bar{\partial}_E) = \nabla^* \nabla + \frac{1}{4}\kappa \quad \text{on } \Lambda^{0,p}(M) \otimes K^{1/2}. \end{aligned} \tag{6.11}$$

さらに, ドルボー-ディラック作用素の時と同様にして次が成立する.

命題 6.3 (Kirchberg, [K4]). 複素 m 次元スピンケーラー多様体上で次が成立.

1. $\Lambda^{0,p}(M) \otimes E$ の正則スピノール ϕ は次を満たす：

$$\bar{\partial}_E \bar{\partial}_E^* \phi = \frac{1}{2} R_{\Lambda^{0,p}}^0 \phi. \tag{6.12}$$

2. $R_{\Lambda^{0,p}}^0 - \kappa/4 < 0$ とすれば, $H^0(M, \Lambda^{0,p}(M) \otimes E) = \{0\}$ となる.

3. M をコンパクトなスピン-ケーラー-アインシュタイン多様体とする. このとき $\kappa > 0$ と仮定すれば, $p \leq m/2$ に対して $H^0(M, \Lambda^{0,p}(M) \otimes E) = \{0\}$.

スピンケーラー多様体上のディラック作用素の固有値評価も一般ボホナー恒等式から証明できる. このとき正則直線束 E に対する Hodge-de Rham-Kodaira の定理を用いることに注意.

命題 6.4 (Kirchberg [K1], [K2]). コンパクト複素 m 次元スピンケーラー多様体上でディラック作用素の固有値 λ（の二乗）は次のように下から評価できる.

$$\lambda^2 \geq \frac{1}{4}\frac{m}{m-1}\min_x \kappa(x) \quad m \text{ is even}, \qquad \lambda^2 \geq \frac{1}{4}\frac{m+1}{m}\min_x \kappa(x) \quad m \text{ is odd}. \tag{6.13}$$

Remark 6.1. 等号が成立する多様体（limiting manifold）は, Kählerian Killing spinor を持つ多様体となる. この分類は A. Moroianu と Lichnerowicz による（1999）.

参考文献

[Br1] T. Branson, *Harmonic analysis in vector bundles associated to the rotation and spin groups,* J. Funct. Anal. **106** (1992), 314-328.

[Br2] T. Branson, *Stein-Weiss operators and ellipticity,* J. Funct. Anal. **151**, (1997), 334-383.

[BH1] T. Branson and O. Hijazi, Vanishing theorems and eigenvalue estimates in Riemannian spin geometry, Internat. J. Math. **8**, (1997), 921-934.

[BH2] T. Branson and O. Hijazi, Improved forms of some vanishing theorems in Riemannian spin geometry, Internat. J. Math., **11**, (2000), 291-304.

[CGH] D. Calderbank, P. Gauduchon, M. Herzlich, *Refined Kato inequalities and conformal weights in Riemannian geometry,* J. Funct. Anal. **173** (2000) 214-255

[H1] Y. Homma, *The higher spin Dirac operator on* 3*-dimensional manifolds,* Tokyo J. Math. **24** (2001), 579-596.

[H2] Y. Homma, *Clifford homomorphisms and higher spin Dirac operators,* preprint.

[H3] Y. Homma, *Spherical harmonic polynomials for higher bundles,* Adv. Appl. Clifford Algebras **11** (S2) (2001), 117-126.

[H4] Y. Homma, *The Bochner identities for the Kählerian gradients,* preprint.

[K1] K. D. Kirchberg, *An estimation for the first eigenvalues of the Dirac operator on closed Kähler manifolds of positive scalar curvature,* Ann. Global Anal. Geom. **4** (1986), 291-325.

[K2] K. D. Kirchberg, *The first eigenvalue of the Dirac operator on Kähler manifolds,* J. Geom. Phys. **7** (1990), 446-468.

[K3] K. D. Kirchberg, *Properties of Kählerian twistor-spinors and vanishing theorem,* Math. Ann. **293** (1992), 349-369.

[K4] K. D. Kirchberg, Holomorphic spinors and the Dirac equation, Ann. Global Anal. Geom. 17 (1999), 97-111.

[M] M. L. Michelsohn, *Clifford and spinor cohomology of Kähler manifolds,* Amer. J. Math. **102**, (1986) 1083-1146.

[MS] J. W. Milnor and J. D. Stasheff, *Characteristic classes,* Annals of Mathematics Studies, **76**. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1974.

[Z] D. P. Želobenko, *Compact Lie groups and their representations,* Trans. Math. Monographs. vol **40**, A.M.S. 1973.